Legyen az AB, BD és BC szakaszok felezőpontja rendre F_1, F_2 és F_3. Egy háromszög körülírt körének középpontját bármelyik két oldalfelező merőlegesének metszéspontjaként megkaphatjuk, ezért az előbb említett három szakasz felezőmerőlegesei O_1, O_2 és O_3 mindegyikét meghatározzák. Mivel az $ABD\triangle$ tompaszögű, O_3 ennek a háromszögnek – és ABC-nek is – külső pontja, F_2 pedig az $ABC\triangle$ belső pontja. Ezért – és az F_1 és F_2-nél lévő derékszögek miatt – $O_3F_1F_2B$ konvex húrnégyszög, amiből $F_1O_3F_2\sphericalangle = F_1BF_2\sphericalangle = 36°$. Hasonlóan a $BF_3O_2F_2$ konvex húrnégyszögből az $F_2O_2O_1$ külső szög is $36°$. Így az $O_1O_2O_3\triangle$ két szöge $36°$, tehát valóban hasonló a $DBA\triangle$-höz, hiszen $ABD\sphericalangle = \dfrac{72°}{2} = 36°$.

Számítsuk ki ezután az $O_1O_2 : O_2O_3$ arányt. Vezessük be az $AB = AC = b$ és $BC = a$ jelölést. Tekintve, hogy a BCD és az ABD háromszögek egyenlő szárúak, $BC = BD = AD = a$ és $CD = b-a$. Az első részben igazolt hasonlóság szerint $O_1O_2 : O_2O_3 = AD : AB = a : b$, tehát az $\dfrac{a}{b}$ arányt kell meghatároznunk. A szögfelező tétel szerint: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b-a}{a}$, amelyből $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \dfrac{a}{b} - 1 = 0$. Ebből $\dfrac{a}{b} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, és mivel $\dfrac{a}{b} > 0$, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Szabó Jácint (Győr, Révai M. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzések. 1. A D pont az aranymetszés szerint osztja a CA szakaszt. Ez azt jelenti, hogy $CD : DA = DA : CA$, ami ekvivalens azzal, hogy $CD : DA = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. A feladat ábrája alapján meghatározhatjuk $18°$, $36°$, $54°$, $72°$, $108°$ stb. szögfüggvényeit. Pl.: $\cos 36° = \dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

3. Az előző pontban említett adatokkal, pl. $\cos 36°$-kal $O_1O_2 : O_2O_3$ kifejezhető. Több megoldónk a szinusztétellel (vagy egyéb trigonometrikus eszközzel) számolva a következőt kapta: $O_1O_2 : O_2O_3 = a : b = \sin 36° : \sin 72° = \dfrac{1}{2 \cdot \cos 36°}$. Ez a megoldás akkor lenne teljes, ha $\cos 36°$ „pontos” értékének meghatározását is tartalmazná.

4. Az $ABC\triangle$ tíz példányából egy szabályos tízszög állítható össze. Ennek minden második csúcsa egy szabályos ötszöget határoz meg. Mivel $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ szerkeszthető, feladatunk eljárást ad a szabályos öt- és tízszög szerkesztésére.

5. Megmutatható, hogy ha egy egyenlő szárú háromszöget az alapon fekvő egyik szög felezője két egyenlő szárú háromszögre vág, akkor a háromszögek szárai közötti szöge $36°$.

Méder Áron (Budapest, Táncsics M. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján