I. megoldás. Tekintsük a hatszög oldalvektorait az *1. ábra* szerinti irányítással. Jelöljük pl. az $ACE\triangle$ területét t_{ACE}-vel. A vektoriális szorzat definíciója szerint (lásd pl. Reiman István: A geometriai és határterületei c. könyvének 46. oldalán):

$$2t_{ACE}=|(\mathbf{c}+\mathbf{d})\times(-\mathbf{a}-\mathbf{b})|\, s2t_{BDF}=|(\mathbf{d}+\mathbf{e})\times(-\mathbf{b}-\mathbf{c})|\,.$$

Tekintve, hogy mindkét vektoriális szorzat ugyanolyan irányú, elegendő azt bizonyítani, hogy

$$(\mathbf{c}+\mathbf{d})\times(-\mathbf{a}-\mathbf{b})=(\mathbf{d}+\mathbf{e})\times(-\mathbf{b}-\mathbf{c}). \tag{1}$$

A vektoriális szorzat tulajdonságai szerint (1) így alakítható:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{c}+\mathbf{d})=(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{d}+\mathbf{e}),$$
$$\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{b}\times\mathbf{d}=\mathbf{b}\times\mathbf{d}+\mathbf{c}\times\mathbf{d}+\mathbf{b}\times\mathbf{e}+\mathbf{c}\times\mathbf{e},$$

ebben $\mathbf{b}\times\mathbf{d}$ mindkét oldalon szerepel, továbbá $\mathbf{a}\times\mathbf{d}=\mathbf{b}\times\mathbf{e}=\mathbf{0}$, ezért azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{c}\times\mathbf{d}-\mathbf{c}\times\mathbf{e}=0,\quad \text{azaz}\quad (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}+\mathbf{e})\times\mathbf{c}=\mathbf{0}.$$

Ez pedig nyilván igaz, hiszen $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{e}=-\mathbf{c}-\mathbf{f}$, és ez párhuzamos a $\mathbf{c}$-vel. Mivel átalakításaink megfordíthatók, igaz a feladat állítása.

Nyilvánvaló, hogy megoldásunk nemcsak konvex, hanem bármilyen, a feltételeknek megfelelő hatszögre alkalmazható, azaz a hatszög lehet akár hurkolt, vagy akár nem síkbeli hatszög is.

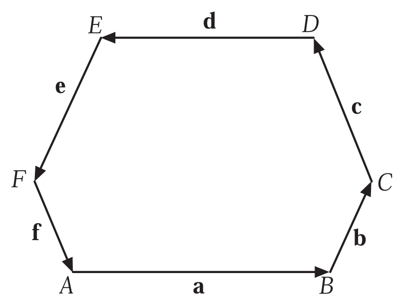
Gyukics Mihály (Szolnok, Varga Katalin Gimn., IV. o.t.) és *Kiss László* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

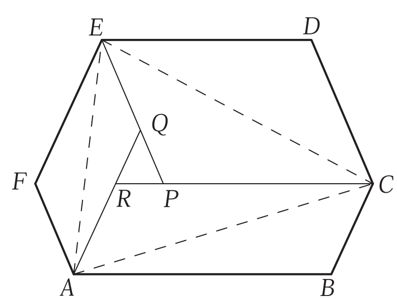
II. megoldás. A *2. ábrán* egy konvex hatszög van. Ennek A, B, C csúcsai és az R pont egy AC átlójú paralelogrammát határoz meg. Hasonlóan szerkesztettük a CE átlójú $CDEP$, illetve az EA átlójú $EFAQ$ paralelogrammát. A *3. ábra* paralelogrammái úgy készültek, hogy egy-egy átlójuk a BD, DF, illetve az FB szakasz, tehát a $BDF\triangle$ oldalai, és a paralelogrammáknak a hatszögcsúcsoktól különböző csúcsai S, T, U. Könnyen látható, hogy $RP=ST=AB-ED$, és hasonlóan $PQ=TU$ és $QR=US$. Ezért $RPQ\triangle\cong STU\triangle$, tehát $t_{RPQ}=t_{STU}$, amely állítás akkor is igaz, ha az R, P Q, illetve az S, T, U pontok egybeesnek. Ez azt is jelenti, hogy a 3–3 paralelogramma területösszege egyenlő. Ennek folytán az $ACE\triangle$ területe is, és a $BDF\triangle$ területe is a megfelelő paralelogrammák félterületének és a köztük lévő háromszög területének az összege, és ez a két esetben egyenlő.

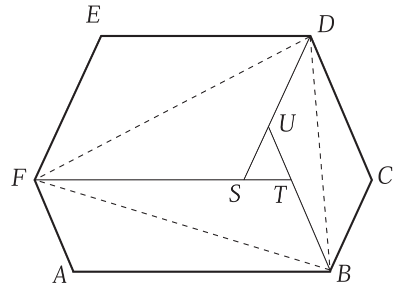
Ha a hatszögnek van 180°-nál nagyobb szöge, akkor két ilyen is van. Ilyen konkáv hatszöget látunk a *4.* és *5. ábrán.* Könnyen leolvasható, hogy a $t_{CDEQ}+t_{EFAP}-t_{ABCR}-t_{RPQ}$ és a $t_{BCDT}+t_{ABUF}-t_{FEDS}-t_{STU}$ területek egyenlőek, és $t_{RPQ}=t_{STU}$, ezért $\frac{1}{2}\left(t_{CDEQ}+t_{EFAP}-t_{ABCR}\right)-t_{RPQ}=\frac{1}{2}\left(t_{BCDT}+t_{ABUF}-t_{FEDS}\right)-t_{STU}$. utóbbi éppen azt jelenti, hogy $t_{ACE}=t_{BDF}$.

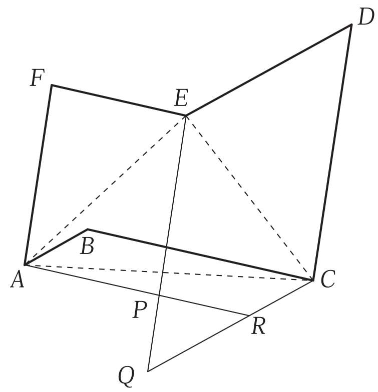
Hasonlóan járhatunk el hurkolt hatszög esetén is.

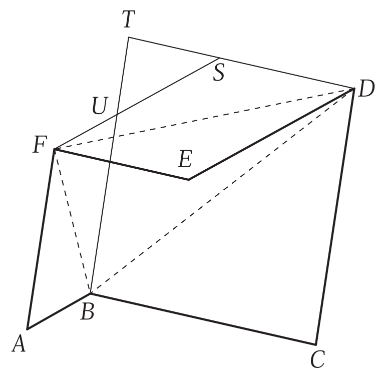
Tóth Ádám (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján






E
D
U
F
S
T
C
A
B


D
F
E
B
A
C
P
R
Q


T
S
D
U
F
E
B
A
C