Legyenek a tetraéder csúcsai A, B, C, D térfogata V, felszíne A, a beírt gömb sugara $r=1$, a BCD lappal párhuzamos érintősík a tetraéderből az $AB_1C_1D_1$ tetraédert vágja le. (Lásd az *ábrát.*) Jelöljük az ebbe a tetraéderbe írható gömb sugarát r_A-val, az $ABCD$ tetraéder A csúcsából húzott magassagát m_A-val. Az $AB_1C_1D_1$ és $ABCD$ tetraéderek hasonlóak, ezért $\frac{r_A}{1}=\frac{m_A-2}{m_A}=1-\frac{2}{m_A}$. A többi lappal párhuzamos érintősíkok lemetszette tetraéderekbe írt gömbök sugarát hasonlóan kiszámítva:

$$r_A+r_B+r_C+r_D=4-2\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}+\frac{1}{m_D}\right). \tag{1}$$

Ha a $BCD\triangle$ területét t_A-val jelöljük, a tetraéder térfogata: $V=\frac{t_A\cdot m_A}{3}$, amiből $\frac{1}{m_A}=\frac{t_A}{3V}$. A többi magasságot hasonlóan kiszámítva:

$$\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}+\frac{1}{m_D}=\frac{t_A+t_B+t_C+t_D}{3V}=\frac{A}{3V}. \tag{2}$$

A tetraéder térfogata a beírt gömb sugarával is kifejezhető, $V=\frac{A\cdot r}{3}$, amiből (tekintve, hogy $r=1$) $A=3V$. Ezért (2) jobb oldala: $\frac{A}{3V}=\frac{3V}{3V}=1$, és így (1)-ből $r_A+r_B+r_C+r_D=4-2=2$.

Szilágyi Judit (Balatonfüred, Lóczy L. Gimn., II. o.t.)

Megjegyzés. A feladat síkbeli megfelelője a következő: A háromszögbe írt r sugarú kör oldalakkal párhuzamos érintői által lemetszett háromszögekbe írható körök sugara r_a, r_b, r_c. Ekkor $r_a+r_b+r_c=r$