Jelöljük a szabályos háromszög csúcsait P, Q, R-rel, és legyen $PQ=1$. Az AB egyenes és a háromszög határának közös pontjai M és N (lásd az *1. ábrát*). Az MN egyenes a szabályos háromszöget két alakzatra vágja szét, amelyek közül az egyik biztosan háromszög. Ábránkon ez az MRN háromszög. Ennek a háromszögnek az M és N csúcsánál lévő szögei közül az egyik nem nagyobb, mint 60°, legyen ez pl. az $NMR\sphericalangle$. Ekkor AB eltolható úgy, hogy A az MR oldalra illeszkedő R-től különböző szabályos háromszög csúcsba kerüljön, (az ábrán ez a P pont) és a szakasz pontjai a háromszöglemez pontjai maradjanak. A *2. ábrán* az eltolt szakasz az A_1B_1. Jelöljük α-val a QPB_1 és RPB_1 szögek közül a nem nagyobbat. Világos, hogy $0^\circ\le\alpha\le 30^\circ$, és A_1B_1 vetülete az egyes oldalakon: $A_1B_1\cdot\cos\alpha$, $A_1B_1\cdot\cos(60^\circ-\alpha)$, $A_1B_1\cdot\sin(30^\circ-\alpha)$. A vetületek összege:

$$A_1B_1\cdot(\cos\alpha+\cos(60^\circ-\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha))=$$
$$A_1B_1\cdot(\cos\alpha+\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha+\sin 60^\circ\cdot\sin\alpha+\sin 30^\circ\cdot\cos\alpha-\cos 30^\circ\cdot\sin\alpha)=$$
$$=2\cdot A_1B_1\cdot\cos\alpha.$$

Mivel $\cos\alpha$ a $0^\circ\le\alpha\le 30^\circ$ intervallumban szigorúan monoton fogyó, a $\cos\alpha$ akkor a legnagyobb, ha $\alpha=0^\circ$, és akkor a legkisebb, ha $\alpha=30^\circ$.

Az $\alpha=0^\circ$ eset azt jelenti, hogy a vetületek összege akkor a legnagyobb, ha az AB szakasz párhuzamos a PQR háromszög egyik oldalával. Könnyen látható, hogy ha AB minden pontja belső pont, akkor $AB<1$, és AB elhelyezhető PQ-val párhuzamosan úgy, hogy az elmozgatott AB minden pontja továbbra is belső pont. A maximum tehát mindig létezik, és értéke $2\cdot AB$.

Az $\alpha=30^\circ$ eset azt jelenti, hogy az AB szakasz merőleges a szabályos háromszög egyik ololdalára. Nyilvánvaló, hogy az AB szakasz csak akkor mozgatható el az $\alpha=30^\circ$-nak megfelelő helyzetbe, és ekkor létezik a keresett minimum, ha AB kisebb, mint a szabályos háromszög magassága, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. A minimum ekkor $AB\cdot\sqrt{3}$.

Ha $\frac{\sqrt{3}}{2}\le AB<1$, akkor $0<\frac{\sqrt{3}}{2AB}\le 1$, így egyértelműen létezik olyan $0^\circ<\beta<30^\circ$ szög, amellyel $\frac{\sqrt{3}}{2AB}=\cos\alpha$ ($\beta=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2AB}$). Ezzel

$$2AB\cdot\cos\alpha=2AB\cdot\cos(30^\circ-\beta)=2AB\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2AB}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4AB^2-3}}{2AB}\right)=$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4AB^2-3}$$

mindig kisebb a vetületek összegénél, amely ezt az értéket tetszőlegesen megközelítheti.

Gyurkó L. Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) *Várkonyi Péter* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)