Először bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}. \tag{2}$$

A jobb oldalt bővítsük $\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)$-gyel.

$$\frac{\left(2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{2(n-(n-1))}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

$n \geq 1$ pozitív egész, ezért $\sqrt{n-1} < \sqrt{n}$, a nevezőt növeljük, ha $n-1$ helyébe n-et írunk, s ezáltal a tört értéke csökken, azaz

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Alkalmazzuk a (2) egyenlőtlenséget tagonként $n = 2$-től, az (1) egyenlőtlenség bal oldalára.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2, \frac{1}{\sqrt{3}} < 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}, \vdots \; \frac{1}{\sqrt{n-1}} < 2\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n-2}, \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Az egyenlőtlenség megfelelő oldalait adjuk össze, és mindkét oldalhoz adjunk 1-et.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

Ez éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség $n \geq 2$-re. $n = 1$ esetén is teljesül, hogy $1 \leq 2\sqrt{n} - 1 = 1$, de ebben az egy esetben egyenlőség áll fenn.

Haus Zoltán (Nagykanizsa, Mező F. Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzés. A feladat állítása teljes indukcióval is bizonyítható.