A feladat a matematika nyelvére átfogalmazva azt jelenti, hogy az n természetes számot 3 különböző természetes szám összegére kell felbontani. Milyen n esetén lesz a felbontások száma n-nél 1-gyel nagyobb?

Írjuk fel pl. $n=6$ esetére az összes lehetséges felbontást:

1 1 4	2 1 3	3 1 2	4 1 1
1 2 3	2 2 2	3 2 1	
1 3 2	2 3 1		
1 4 1			

Láthatjuk, hogy a felsoroltak között némelyik többször is előfordul, pl. 1 2 3 és 2 1 3 csak a sorrendben különbözik, amit mi nem tudunk megkülönböztetni, mert csak azonos fajtájú szaloncukrunk van. Az $n=6$ esetén csak háromféle különböző halomba osztás létezik, és közülük csak egy elégíti ki azt a feltételt, hogy minden halomban más-más számú cukor legyen, $n<6$ esetén pedig egy sem tudja kielégíteni a feladat feltételét.

Legyen n elemünk (n darab szaloncukor), ezt 3 nem üres halmazba $\binom{n-1}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$-féleképpen oszthatjuk szét. (Képzeljük el ugyanis, hogy a szaloncukrokat sorban lerakjuk, és három kupacra bontjuk két osztóvonallal. Az osztóvonalakat pedig $n-1$ közre helyezhetjük.) Ez az összes lehetséges felosztás; ebből le kell vonnunk azok számát, amelyek többször fordulnak elő, illetve nem tesznek eleget a feladat követelményének.

Legyen $k<n$, és számoljuk meg azokat a felosztásokat, amelyekben k (k darab szaloncukor) elemű halmaz kétszer fordul elő. Ezek:

$$k,\quad k,\quad n-2k;\qquad k,\quad n-2k,\quad k;\qquad n-2k,\quad k,\quad k;$$

ez 3 lehetőség, és ha $n-2k=k$, azaz $n=3k$ (n osztható 3-mal), akkor még egy lehetőség az, amikor a 3 halom mindegyikében ugyanannyi elem (cukor) van.

Eszerint 4 esetet kell megkülönböztetnünk:

1. Ha n páros, de 3-mal nem osztható, akkor $n\ge 2k$, $k\le \frac{n}{2}$, s mivel k egész, $\frac{n}{2}-1$ olyan eset van, amikor két halom ugyanannyi elemből áll, s ezek mindegyike 3-szor szerepel. Ekkor a nekünk megfelelő esetek száma:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-3\left(\frac{n}{2}-1\right).$$

Ezt – mivel a sorrendet nem kívánjuk figyelembe venne – el kell osztanunk a 3 elem lehetséges sorrendjeinek számával, $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$-tal.

Írjuk fel a feltételeket kielégítő egyenletet:

$$\frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-3\left(\frac{n}{2}-1\right)}{6}=n+1.$$

Rendezve a következő egyenlethez jutunk: $n^2-18n-4=0$, s ennek nincs egész megoldása.

2. Ha n páros és 3-mal is osztható, akkor

$$\frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-3\left(\frac{n}{2}-2\right)-1}{6}=n+1.$$

Innen $n^2-18n=0$, azaz $n=0$ vagy $n=18$.

3. Ha n páratlan és nem osztható 3-mal, akkor $\frac{n-1}{2}$ olyan felosztás van, amiben két halom elemszáma megegyezik. Az egyenlet:

$$\frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-3\left(\frac{n-1}{2}\right)}{6}=n+1,$$

$n^2-18n-7=0$. Nincs egész megoldása.

4. Ha n páratlan és osztható 3-mal, az egyenlet:

$$\frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-3\left(\frac{n-1}{2}-1\right)-1}{6}=n+1,$$

$n^2-18n-3=0$. Ekkor sincs egész megoldás.

Látjuk, hogy $n=18$ megoldás, azaz 18 darab szaloncukrot 19-féleképpen tudunk 3 halomba osztani úgy, hogy a cukrok száma minden halomban más legyen. Más megoldása nincs a feladatnak, mivel az összes lehetséges esetet megvizsgáltuk.

Gyimesi Andrea (Miskolc, Földes F. Gimn., 8. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A megoldók többsége (legtöbbjük 3 pontot kapott) csak azt látta be, hogy a 18 jó megoldás, de azt nem, hogy más megoldás nem lehetséges.