A szokásos jelölésekkel

$$a_1 = 2^n, \qquad q = \frac{3}{2}, \qquad S_{n+1} = 2^n \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Ismeretes, hogy

$$a^{2k} - b^{2k} = (a+b)\left(a^{2k-1} - a^{2k-2}b + a^{2k-3}b^2 - \dots + \dots - b^{2k-1}\right),$$

azaz $a^{2k} - b^{2k}$ osztható $a+b$-vel. Esetünkben, ha n páratlan, akkor $n+1$ páros, és ezért $3^{n+1} - 2^{n+1}$ osztható $3+2$-val, vagyis 5-tel. Ezzel az állítás első felét igazoltuk.

Másrészt, ha $n = 2k$ (vagyis nem páratlan), akkor $n+1 = 2k+1$, és

$$3^{2k+1} - 2^{2k+1} = 3 \cdot 3^{2k} - 2 \cdot 2^{2k} = 3 \cdot \left(3^{2k} - 2^{2k}\right) + 2^{2k},$$

ez pedig biztosan nem osztható 5-tel.

Ezzel az állítás második felét (a „csak akkort”) is igazoltuk.

Hegyi Péter (Budapest, Szent István Gimn., I. o.t.)