Legyen a kör sugara $R=1$, egy körcikkhez tartozó középponti szög $\dfrac{360^\circ}{n}$, az ívhossz $i=\dfrac{2\pi}{n}$.

A kúp alapkörének sugara r. A $2r\pi=\dfrac{2\pi}{n}$ egyenletből

$$r=\frac{1}{n}.$$

A kúp magasságát a Pitagorasz-tétellel számíthatjuk ki:

$$m=\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-1}.$$

A kúpok együttes térfogata:

$$V=\frac{n\left(\frac{1}{n}\right)^2\pi\frac{1}{n}\sqrt{n^2-1}}{3}=\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}.$$

Kérdés, mikor lesz ez az összeg maximális.

A $\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}=\dfrac{1}{n}\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}$ kifejezés „láthatóan” csökken, ha n növekszik (és $n\geq 2$, hiszen legalább két körcikkre szétvágtuk a papírlapot):

n	2	3	4	5
$\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}$	$0,433\ldots$	$0,314\ldots$	$0,242\ldots$	$0,196\ldots$

Az $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$ függvény számítógéppel készült grafikonját mutatja a *3. ábra*.

Várható tehát, hogy a maximumot $n=2$ esetén kapjuk. Ehhez azt kell belátni, hogy

$$\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{2^2-1}}{2^2}>\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2},\qquad \text{ha } n>2.$$

Négyzetre emelve $(n^2-1>0)$, és rendezve

$$3n^4-16n^3-16>0.$$

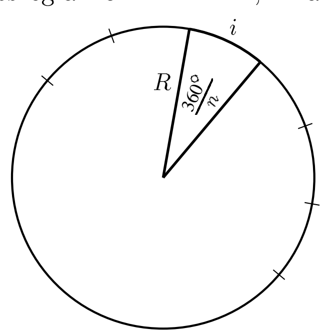
Ez n^2-ben egy másodfokú kifejezés, alakítsuk teljes négyzetté:

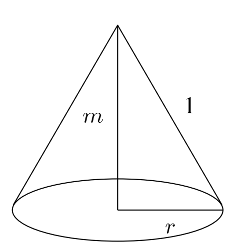
$$9n^4-48n^2-48=(3n^2-8)^2-16>0,$$

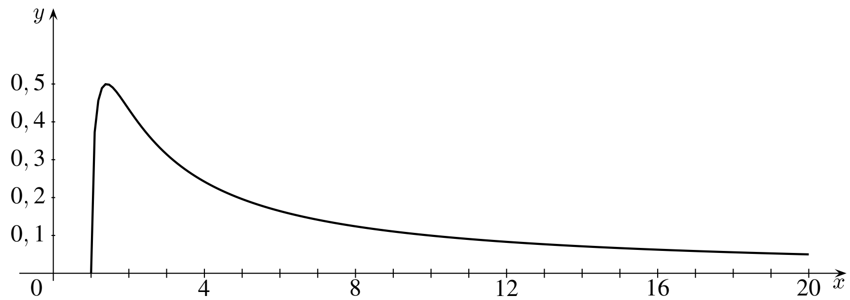
ahonnan $(3n^2-8)^2>16$, márpedig ha $n>2$, akkor $3n^2>8$, és

$$(3n^2-8)^2>(3\cdot 2^2-8)^2=4^2=16.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk. A térfogatösszeg akkor maximális, ha a kört 2 körcikkre osztottuk.







y
0, 5
0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
0
4
8
12
16
20
x