Legyen az i-edik sor j-edik eleme a_{ij}, az i-edik sorvektor pedig $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$. Két sorvektor skaláris szorzatát a szokásos módon definiáljuk:

$$v_i v_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}.$$

Az $a_{ik}a_{jk}$ szorzat értéke 1, ha a_{ik} és a_{jk} megegyezik, és -1 ellenkező esetben. Emiatt két különböző sor skaláris szorzata 0, míg egy sor skaláris négyzetének értéke n. Legyen $V = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

$$V^2 = (v_1 + \cdots + v_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} v_i v_j = n^2.$$

Legyenek V koordinátái $b_1, \dots, b_n$; azt kell bizonyítanunk, hogy $b_1 + \cdots + b_n \le n^{3/2}$. A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \le \sqrt{\frac{b_1^2 + \cdots + b_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{V^2}{n}} = \sqrt{n},$$

vagyis az állítás igaz.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás könnyen elmondható a skaláris szorzat fogalma nélkül is.

2. A bizonyított egyenlőtlenség bizonyos n értékekre éles. Definiáljuk a következő mátrixsorozatot:

$$M_1 = [-1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1]; \qquad M_{k+1} = [-M_k + M_k + M_k + M_k + M_k - M_k + M_k +$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az M_k mátrix 4^k sorból és ugyanennyi oszlopból áll, és teljesíti a feltételeket, ugyanakkor az elemeinek összege pontosan $8^k = (4^k)^{3/2}$.

Pap Gyula (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o.t.)