Bár a feladat szövegéből sajnálatosan kimaradt, nyilván 3^n-nél kisebb *abszolút értékű* főegyütthatóról van szó. Minden pozitív egész n-hez konstruálunk megfelelő polinomot. Legyen először $n=2k$, ahol k pozitív egész. Definiáljuk az f függvényt a következőképpen:

$$f(x)=\frac{5x^2-5x+1}{4x^2-4x+1}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a definíció $x=\frac{1}{2}$ kivételével mindenhol értelmes. Mivel $f(0)=f(1)=1$ és $\lim_{\frac{1}{2}} f=-\infty$, a függvény a $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ és $\left(\frac{1}{2};1\right)$ intervallumokon befutja a $(-\infty;1)$ félegyenest. Legyen T_k a k-adik Csebisev-polinom (ld. az 1. megjegyzést), és tekintsük a $p(x)=T_k\left(f(x)\right)$ függvényt. Ez egy racionális törtfüggvény, amely felírható

$$p(x)=T_k\left(f(x)\right)=\frac{q(x)}{(4x^2-4x+1)^k}$$

alakban, ahol q egy $2k$-adfokú egész együtthatós polinom. Mivel T_k-nak k különböző gyöke van a $(-1;1)$ intervallumban, p, és ezáltal q is a $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ és $\left(\frac{1}{2};1\right)$ intervallumon egyaránt k helyen eltűnik. A q tehát olyan $2k$-adfokú polinom, amelynek $2k$ különböző gyöke van $(0;1)$-ben. Ugyancsak könnyen ellenőrizhető, hogy q főegyütthatója

$$0<4^kT_k\left(\frac{5}{4}\right)=4^k\mathrm{ch}\left(k\mathrm{arch}\,\frac{5}{4}\right)=4^k\mathrm{ch}\left(k\ln 2\right)=4^k\frac{2^k+2^{-k}}{2}<8^k=(\sqrt{8})^n<3^n.$$

Ha $n=2k+1$, akkor az előbbi polinomot megszorozhatjuk a $2x-1$ polinommal, így a főegyüttható az előbbi kétszerese lesz, és egy új gyök keletkezik $x=\frac{1}{2}$-ben.

Megjegyzések. 1. A T_k Csebisev-polinom az a kifejezés, ahogyan $\cos k\alpha$ előáll $\cos\alpha$ polinomjaként; azaz $T_k(\cos\alpha)=\cos k\alpha$.

2. *Pap Gyula* megoldásában a $p_1(x)=2x-1$, $p_2(x)=6x^2-6x+1$, $p_{2n}(x)=p_n(x)^2-2x^n(1-x)^n$ rekurzióval definiált polinomok révén konstruált tetszőleges fokszámú, a feladat követelményeit kielégítő polinomot.