A könnyebb írásmód és az általánosság kedvéért használjuk az $n = 1995$ jelölést; az n speciális voltát csak a III. megoldásban használjuk ki, ott is csak annyiban, hogy n páratlan.

I. megoldás. A feladatot úgy fogalmazhatjuk, hogy vannak olyan $\varepsilon_i = \pm 1$ $(0 \le i \le n)$ együtthatók, amelyekkel $\left|\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i z^i\right| \le 4$. Általánosabban azt fogjuk igazolni, hogy tetszőleges, legfeljebb egységnyi abszolút értékű z_i $(0 \le i \le n)$ komplex számok esetében találhatók olyan $\varepsilon_i = \pm 1$ $(0 \le i \le n)$ együtthatók, amelyekkel $\left|\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i z_i\right| \le \sqrt{2}$. Az n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 0$ esetén az állítás nyilvánvaló, $n = 1$ esetén pedig azonnal következik a

$$|z_0 + z_1|^2 + |z_0 - z_1|^2 = (z_0 + z_1)(\overline{z_0} + \overline{z_1}) + (z_0 - z_1)(\overline{z_0} - \overline{z_1}) =$$
$$= 2z_0\overline{z_0} + 2z_1\overline{z_1} = 2|z_0|^2 + 2|z_1|^2 \le 4$$

egyenlőtlenségből. Legyen most $n \ge 2$. A célunk az, hogy a bizonyítandó állítást visszavezessük az $(n-1)$-re vonatkozó hasonló állításra. Kössük ehhez össze a z_i-t és a 0-t egy-egy e_i egyenessel $(0 \le i \le n)$. A kapott egyenesek $2(n+1)$, azaz legalább 6 (esetleg elfajuló) szögtartományra bontják a síkot, vagyis a szögek között kell lennie legfeljebb 60 fokosnak. Feltehetjük pl., hogy az e_{n-1} és az e_n egyenesek legfeljebb 60 fokos szöget zárnak be. Mivel a bizonyítandó állításon nem változtat, ha a z_n-et kicseréljük $(-z_n)$-re, ezért azt is feltehetjük, hogy z_{n-1} és z_n szöge (ha létezik) legfeljebb 60 fok. De akkor a 0, z_{n-1}, z_n pontok által határolt (esetleg elfajuló) háromszögben a 0-val szemköztes oldal nem lehet a másik kettő mindegyikénél nagyobb, más szóval

$$|z_{n-1} - z_n| \le \max\left(|z_{n-1}|, |z_n|\right) \le 1.$$

Ezért az $(n-1)$-re vonatkozó indukciós feltevést alkalmazhatjuk a $z_0, \ldots, z_{n-2}$ és $z_{n-1} - z_n$ legfeljebb egységnyi abszolút értékű számokra, vagyis alkalmas $\varepsilon_i = \pm 1$ $(0 \le i \le n-1)$ együtthatókkal

$$|\varepsilon_0 z_0 + \cdots + \varepsilon_{n-2} z_{n-2} + \varepsilon_{n-1} z_{n-1} - \varepsilon_n z_n| \le \sqrt{2},$$

ami igazolja az n-re vonatkozó állítást.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A feladatot most is abban az erősebb formában oldjuk meg, amikor a 4 helyén a $\sqrt{2}$ áll. Vezessük be a $p(z) = 1 + z + \cdots + z^n$ jelölést. Megmutatjuk, hogy a $p(z)$ és a $p(-z)$ polinomok egyike eleget tesz a feltételeknek. A bizonyítás egyszerű. Nyilvánvaló, hogy ezen polinomok minden együtthatója ± 1. Ha z valós része nempozitív, akkor

$$|1 - z|^2 = (1 - z)(1 - \overline{z}) = 1 - (z + \overline{z}) + z\overline{z} \ge 1 + z\overline{z} = 1 + |z|^2 = 2$$

alapján a háromszög-egyenlőtlenséget is használva

$$|p(z)| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \le \frac{\left|1 - z^{n+1}\right|}{\sqrt{2}} \le \frac{1 + \left|z^{n+1}\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Ha z valós része pozitív, akkor $-z$ valós része negatív, tehát az előbbi eredmény szerint

$$|p(-z)| \le \sqrt{2}.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

III. megoldás. Az I. megoldásbeli állításnak azt a gyengébb változatát fogjuk egyszerű módon igazolni, hogy ha n páratlan, és z_i $(0 \le i \le n)$ egységnyi abszolút értékű komplex számok, akkor találhatók olyan $\varepsilon_i = \pm 1$ $(0 \le i \le n)$ együtthatók, amelyekkel $\left|\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i z_i\right| < \pi$. Ebből még mindig következik a feladat állítása. A z_i $(0 \le i \le n)$ számok az egységkörön egy páros oldalszámú (esetleg elfajuló) húrsokszöget jelölnek ki, amelynek kerülete – mint ismeretes – kisebb a kör kerületénél, 2π-nél. Ha a sokszög oldalait valamilyen körüljárás szerint egymásra következő egészekkel számozzuk, akkor a kerület kifejezhető a páros, illetve a páratlan indexű oldalak összhosszainak összegeként. Valamelyik összhossz tehát kisebb π-nél. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy az esetleg ponttá fajuló $\overline{z_0 z_1}, \overline{z_2 z_3}, \ldots, \overline{z_{n-1} z_n}$ húrok azok az *oldalak*, amelyek összhossza kisebb π-nél, de akkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$|z_0 - z_1 + \cdots + z_{n-1} - z_n| \le |z_0 - z_1| + \cdots + |z_{n-1} - z_n| < \pi.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk, sőt egy kicsit többet is: az $\varepsilon_i = \pm 1$ $(0 \le i \le n)$ együtthatók úgy is megválaszthatók, hogy közöttük ugyanannyi $+1$ legyen, mint -1.

Megjegyzés. Jelöljük $\mathcal{P}_n$-nel (n pozitív egész) azon $(n-1)$-edfokú polinomok halmazát, amelyek minden együtthatója ± 1, továbbá $\mathcal{E}$-vel az egységnyi abszolút értékű komplex számokat. A fentiek során igazoltuk, hogy minden $z \in \mathcal{E}$

számhoz található olyan $p \in \mathcal{P}_n$ polinom, hogy $|p(z)| \leq \sqrt{2}$ teljesül. Ez az eredmény érdekes abból a szempontból, hogy tetszőleges $z \in \mathcal{E}$ szám esetében a $|p(z)|$ értékek négyzetes átlaga a $p \in \mathcal{P}_n$ polinomokon kereken $\sqrt{n}$, amint az rövid számolással ellenőrizhető. Hasonlóan az is igaz, hogy tetszőleges $p \in \mathcal{P}_n$ polinom esetében pontosan $\sqrt{n}$ a $|p(z)|$ értékek négyzetes (integrál)átlaga a $z \in \mathcal{E}$ számokon. Az analóg kérdésre azonban, tehát hogy tetszőleges $p \in \mathcal{P}_n$ esetében milyen kicsi $|p(z)|$ érték garantálható egy alkalmas $z \in \mathcal{E}$-vel, nem ismeretes a válasz. Sőt, még az a sejtés sem dőlt meg, hogy létezik olyan c pozitív konstans és minden n-re egy olyan $p_n \in \mathcal{P}_n$ polinom, hogy $\min\limits_{z \in \mathcal{E}} |p_n(z)| > c\sqrt{n}$. Ellenben Rudin 1959-ben konstruált olyan $p_n \in \mathcal{P}_n$ polinomokat, amelyekre $\max\limits_{z \in \mathcal{E}} |p_n(z)| < 5\sqrt{n}$ teljesül.