Nyilván $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ szogorúan monoton nő, $a_n < b_n$, és $c_n$ definíciója alapján $c_n = n+2b_n-a_n = n+(b_n-a_n)+b_n > b_n$. Ezért az $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sorozatok közül semelyik kettőnek nincs közös eleme (ez $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ esetén nyilvánvaló, $m < n$ esetén $a_n$ és $b_n$ definíciója miatt $a_n \neq c_m \neq b_n$, $m \geq n$ esetén pedig $c_m > b_m > a_m \geq b_n \geq a_n$ miatt $a_n \neq c_m \neq b_n$.)

Bebizonyítjuk, hogy minden $n$-re teljesül az alábbi három állítás valamelyike:

3

(1) $a_n = \left[n\left(1+\sqrt{3}\right)\right] - 2$, $\quad b_n = \left[n\left(1+\sqrt{3}\right)\right] - 1$, $\quad c_n = \left[n\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$,(2) $a_n = \left[n\left(1+\sqrt{3}\right)\right] - 1$, $\quad b_n = \left[n\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$, $\quad c_n = \left[n\left(2+\sqrt{3}\right)\right]+1$,(3) $a_n = \left[n\left(1+\sqrt{3}\right)\right]-2$, $\quad b_n = \left[n\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$, $\quad c_n = \left[n\left(2+\sqrt{3}\right)\right] + 2$.

Ebből a feladat állítása következik.

Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$-re látható, hogy (2) teljesül. Tegyük fel, hogy $1, 2, \dots, n$-re igaz, és vizsgáljuk $n+1$-re.

Az $a_{n+1}$-nél kisebb pozitív egészek száma $a_{n+1}-1$. Másrészt az $a_{n+1}$-nél kisebb pozitív egészek az $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$, valamint a $c_1, \dots, c_n$ közül azok, amelyek $a_{n+1}$-nél kisebbek. Így $a_{n+1} \leq 3n+1$.

Ha $i \leq \left[\frac{a_{n+1}-1}{2+\sqrt{3}}\right]$, akkor $i \leq \left[\frac{3n}{2+\sqrt{3}}\right] \leq n$, így az indukciós feltevés alapján $c_i \leq \left[i\left(2+\sqrt{3}\right)\right] + 2 \leq \left[\left[\frac{a_{n+1}-1}{2+\sqrt{3}}\right]\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$ (az egészrész-jelek elhagyása növelést jelent, mert az egészrészben szereplő kifejezést nem egészek). Ezért az $a_{n+1}$-nél kisebb $c_i$-k száma legalább $\left[\frac{a_{n+1}-1}{2+\sqrt{3}}\right]$. Másrészt $n \geq i \geq \left[\frac{a_{n+1}}{2+\sqrt{3}}\right]$-re már $c_i \geq a_{n+1}$ adódik: $c_i \geq \left[i\left(2+\sqrt{3}\right)\right] \geq [a_{n+1}] = a_{n+1}$. Ezért $2n + \left[\frac{a_{n+1}-1}{2+\sqrt{3}}\right] \leq a_{n+1}-1 \leq 2n + \left[\frac{a_{n+1}}{2+\sqrt{3}}\right] - 1$. Ebből

$$2n + \frac{a_{n+1}-1}{2+\sqrt{3}} - 1 < a_{n+1} - 1 < 2n + \frac{a_{n+1}}{2+\sqrt{3}},$$
$$2n - \frac{1}{2+\sqrt{3}} < a_{n+1}\left(1 - \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) < 2n+1,$$
$$n\left(1+\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}-1}{2} < a_{n+1} < n\left(1+\sqrt{3}\right) + \frac{1+\sqrt{3}}{2},$$
$$(n+1)(1+\sqrt{3}) - 3 < a_{n+1} < (n+1)\left(1+\sqrt{3}\right) - 1.$$

Így $a_{n+1} = \left[(n+1)\left(1+\sqrt{3}\right)\right] - 2$ vagy $a_{n+1} = \left[(n+1)\left(1+\sqrt{3}\right)\right] - 1$.

$b_{n+1}$ értékére hasonló módon következtethetünk:

A $b_{n+1}$-nél kisebb pozitív egészek az $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_n$, valamint a $b_{n+1}$-nél kisebb $c_i$-k, amelyek száma legalább $\left[\frac{b_{n+1}-1}{2+\sqrt{3}}\right]$ és legfeljebb $\left[\frac{b_{n+1}}{2+\sqrt{3}}\right] - 1$, tehát

$$2n+1+\left[\frac{b_{n+1}-1}{2+\sqrt{3}}\right] \leq b_{n+1}-1 \leq 2n+1+\left[\frac{b_{n+1}}{2+\sqrt{3}}\right] - 1,$$
$$2n + \frac{b_{n+1}-1}{2+\sqrt{3}} < b_{n+1} - 1 < 2n+1+\frac{b_{n+1}}{2+\sqrt{3}},$$
$$2n - \frac{1}{2+\sqrt{3}} + 1 < b_{n+1}\left(1 - \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) < 2n+2,$$
$$n\left(1+\sqrt{3}\right) + 1 < b_{n+1} < (n+1)\left(1+\sqrt{3}\right),$$
$$(n+1)\left(1+\sqrt{3}\right) - 2 < b_{n+1} < (n+1)\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Ebből $b_{n+1} = \left[(n+1)\left(1+\sqrt{3}\right)\right] - 1$ vagy $b_{n+1} = \left[(n+1)\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$.

Így $a_{n+1}$ és $b_{n+1}$ értékeire az (1), (2), (3) állítások valamelyike teljesül ($a_{n+1} = b_{n+1}$ nyilván kizárt), és $c_{n+1}$-re is teljesül a megfelelő állítás $c_{n+1} = (n+1) + 2b_{n+1} - a_{n+1}$ miatt.

*Frenkel Péter* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján