Megadunk egy $\prec$ relációt a következőképpen. Legyen $1 \prec 2$. Ha a relációt már definiáltuk az $1, 2, \ldots, n$ számok között ($n \geq 2$), akkor tetszőleges $1 \leq a \leq n$ egészet és $(n+1)$-et véve, írjuk fel őket $a = 2^k a_1$ és $n+1 = 2^l B$ alakban, ahol k és l nemnegatív egészek, és a_1, B páratlan számok. (Ilyen felírás nyilván minden pozitív egészre létezik és egyértelmű.) Ha most $k < l$, akkor legyen $a \prec n+1$, míg $k > l$ esetén legyen $n+1 \prec a$. Ha $k = l$, akkor tekintsük az n-nél nem nagyobb (és egymástól különböző) $\frac{a_1+1}{2}$ és $\frac{B+1}{2}$ egészeket; legyen $a \prec n+1$, ha $\frac{a_1+1}{2} \prec \frac{B+1}{2}$, illetve legyen $n+1 \prec a$, ha $\frac{B+1}{2} \prec \frac{a_1+1}{2}$. Ezzel a $\prec$ relációt bármely két pozitív egész között értelmeztük, és a kívánt a) tulajdonság láthatóan teljesül. Tételezzük fel, hogy a többi követelmény valamelyikét a reláció nem elégíti ki, azaz léteznek olyan a, b, c pozitív egészek, amelyekre $a \prec b \prec c$, és $2b = a+c$ vagy $a \not\prec c$. Az ilyen számhármasok közül válasszunk egy olyat a, b, c-nek, amelyben c a lehető legkisebb. Írjuk fel a számokat $a = 2^k a_1$, $b = 2^l b_1$, $c = 2^m c_1$ alakban, ahol k, l, m nemnegatív, a_1, b_1, c_1 pedig páratlan egészek. Mivel $a \prec b \prec c$, azért $k \leq l \leq m$.

1. eset: $k < m$; ekkor $a \prec c$. Nyilván 2^{k+1} osztója $2b = 2^{l+1} b_1$-nek, de nem osztója $a + c = 2^k a_1 + 2^m c_1 = 2^k(a_1 + 2^{m-k} c_1)$-nek, mivel $a_1 + 2^{m-k} c_1$ páratlan. Így $2b \neq a + c$, ellentmondva a, b, c választásának.

2. eset: $k = l = m$; ekkor $\frac{a_1+1}{2} \prec \frac{b_1+1}{2} \prec \frac{c_1+1}{2}$. Ha $c \neq 1$, akkor $\frac{c_1+1}{2} < c$, és c minimalitása folytán $\frac{a_1+1}{2} \prec \frac{c_1+1}{2}$, ezért $a \prec c$, továbbá $2 \cdot \frac{b_1+1}{2} \neq \frac{a_1+1}{2} + \frac{c_1+1}{2}$ miatt $2b \neq a + c$ lenne, az indirekt feltevéssel szemben; tehát $c = c_1 = 1$. Ekkor $b \prec 1$. Legyen d az a legkisebb pozitív egész, amelyre $d \prec 1$. Nyilván d nagyobb 1-nél és páratlan, viszont akkor $\frac{d+1}{2} \prec \frac{1+1}{2} = 1$. Ez azonban ellentmond d minimalitásának, hiszen $\frac{d+1}{2} < d$.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, tehát a $\prec$ reláció a feladat valamennyi követelményének megfelel.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., III. o.t.)