Egy polinomnak az 1 pontosan akkor legalább k-szoros gyöke ($k \geq 1$ egész), ha a polinomon kívül gyöke a polinom első, második, $\ldots$, $(k-1)$-edik deriváltjának is. Tekintsük először mindazokat a polinomokat, amelyeknek minden együtthatója a $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ halmazból való, és a fokuk legfeljebb n. Ha $p = a_n x^n + \cdots + a_0$, akkor a p helyettesítési értéke az 1-ben $p(1) = a_n + \cdots + a_0$, a p i-edik deriváltjának pedig az 1-ben vett helyettesítési értéke

$$p^{(i)}(1) = i!\left(\binom{n}{i}a_n + \binom{n-1}{i}a_{n-1} + \cdots + \binom{i}{i}a_i\right).$$

Nyilván

$$0 \leq \frac{p^{(i)}(1)}{i!} \leq n\left(\binom{n}{i} + \binom{n-1}{i} + \cdots + \binom{i}{i}\right) = n\binom{n+1}{i+1}.$$

Így $p^{(i)}(1)$ legfeljebb $1 + n\binom{n+1}{i+1}$-féle értéket vehet fel, és ez „$i = 0$-ra" is igaz, hiszen $0 \leq p(1) \leq n(n+1)$. Ezért a fenti p polinomhoz tartozó rendezett

$$\left(p(1),\ p^{(1)}(1),\ p^{(2)}(1),\ \ldots,\ p^{(k-1)}(1)\right)$$

k-asok S száma:

$$S \leq (n(n+1)+1)\left(n\binom{n+1}{2}+1\right)\ldots\left(n\binom{n+1}{k}+1\right) \leq\leq ((n+1)(n+1)\left((n+1)\binom{n+1}{2}\right)\ldots\left((n+1)\binom{n+1}{k}\right) \leq\leq (n+$$

(bármely rögzített $1 \leq k \leq n$ egészre). Másrészt a polinomok minden együtthatója $(n+1)$-féle értéket vehet fel, ezért a polinomok száma: $(n+1)^{n+1} > (n+1)^{\frac{k(k+3)}{2}} \geq S$, ha $k = \left[\sqrt{n}\right]$. Így létezik két olyan különböző polinom, p_1 és p_2, amelyekre $p_1(1) = p_2(1)$, $p_1^{(1)}(1) = p_2^{(1)}(1)$, $\ldots$, $p_1^{(k-1)}(1) = p_2^{(k-1)}(1) \quad (k = \left[\sqrt{n}\right])$.

Legyen $q = p_1 - p_2$, ekkor $0 \neq q$ minden együtthatója egész és legfeljebb n abszolút értékű, továbbá

$$q(1) = q^{(1)}(1) = q^{(2)}(1) = \cdots = q^{([\sqrt{n}]-1)}(1) = 0.$$

Jelölje q fokát $d \leq n$, és legyen $r = x^{n-d}q$; ekkor az r polinom a feladat valamennyi feltételét kielégíti.

Burcsi Péter (Pápa, Türr István Gimn., IV. o.t.)