Jelöljük az oldalakat az a, b, c, d, e kisbetűkkel, a velük nem érintkező átlókat a megfelelő A, B, C, D, E nagybetűkkel. Így minden átlót számba vettük és mindegyiket csak egyszer. Az öt csúcs által meghatározott lehetséges húrnégyszögek mindegyikére írjuk fel a Ptolemaiosz-tételt, ekkor a

$$be + aA = CD, \qquad ca + bB = DE, \qquad db + cC = EA, \qquad ec + dD = AB, \qquad ad + eE = BC$$

összefüggésekhez jutunk. Az egyenlőségek szorzata némi átrendezés után az

$$\left(1+\frac{aA}{be}\right)\left(1+\frac{bB}{ca}\right)\left(1+\frac{cC}{db}\right)\left(1+\frac{dD}{ec}\right)\left(1+\frac{eE}{ad}\right)=\left(\frac{ABCDE}{abcde}\right)^2 \tag{1}$$

alakot ölti, amelynek jobb oldalán megjelent a feladatban kérdezett hányados. A célunk most az, hogy a bal oldalt valamiképpen megbecsüljük ugyanezzel a hányadossal, remélhetőleg így majd következtethetünk a keresett szélsőértékre.

A bal oldalon lévő szorzat helyett tekintsük általánosabban az

$$(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_n)$$

kifejezést pozitív λ_i-kkel (a mi esetünkben $n = 5$), amely kifejtve a λ_i-knek egy n-edfokú polinomja. Alkalmazzuk minden $1 \le m \le n$ esetében az m-edfokú tagok összegére a számtani és a mértani közép között fennálló egyenlőtlenséget: azt kapjuk, hogy a megfelelő összeg nem nő, ha minden λ_i helyébe az $\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ mennyiséget írjuk (ennek oka az, hogy az egyes összegek – a kiindulásul vett polinom homogén komponensei – szimmetrikusak a λ_i-kben). Végeredményben tehát a szorzat sem nő, ha minden λ_i-t a fenti módon helyettesítünk, azaz

$$(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdot(1+\lambda_n) \ge \left(1+\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2\cdot\lambda_n}\right)^n. \tag{2}$$

A $h = \sqrt[5]{\dfrac{ABCDE}{abcde}}$ jelöléssel az eredeti (1) összefüggés a (2)-vel együtt a

$$h^{10} \ge (1+h)^5$$

egyenlőtlenséget adja. Mivel az $x \mapsto x^5$ függvény szigorúan növő a valós számokon és h pozitív, ezért az előbbi egyenlőtlenség éppen azt jelenti, hogy $h \ge \dfrac{\sqrt5+1}{2}$, azaz

$$\frac{abcde}{ABCDE} = h^{-5} \le \left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^5 = \frac{5\sqrt5-11}{2}.$$

Világos, hogy a fenti egyenlőtlenségekben egyenlőség is teljesül a szabályos ötszög esetében, tehát az $\dfrac{abcde}{ABCDE}$ hányados keresett maximuma $\dfrac{5\sqrt5-11}{2}$.

Gröller Ákos (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az önmagában érdekes (2) egyenlőtlenség azzal a ténnyel egyenértékű, hogy az $f(x) = \ln(1+e^x)$ függvény konvex, ami következik pl. az $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$ deriváltfüggvény növekvő voltából is.