I. megoldás. a) Nyilván elegendő belátnunk, hogy minden n pozitív egésznek van olyan többszöröse, amely csak a 0 és 1 számjegyeket tartalmazza. Tekintsük ehhez az

$$1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ db}}$$

„csupaegy" számokat. Ezek közül valamelyik kettő ugyanazt a maradékot adja n-nel osztva a skatulya-elv alapján, különbségük tehát n-nek többszöröse, amely természetesen csak a 0 és 1 számjegyeket tartalmazza.

b) Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden n pozitív egészhez található n-tarka szám, vagyis a feladatnak erre a részére igenlő a válasz. 1-tarka szám nyilvánvalóan létezik, ilyen pl. az 1234567890. Tegyük fel, hogy n-tarka számot már találtunk, jelöljük A-val: ennek segítségével konstruálni fogunk egy $(n+1)$-tarka számot, ami igazolja állításunkat. A kérdéses $(n+1)$-tarka számot keressük a $C = 10^l A + B$ alakban, ahol l és B pozitív egészek. Ha $1 \le m \le n+1$, akkor

$$mC = 10^l(mA) + mB$$

tartalmazza mindazokat a számjegyeket, amiket mA és mB, feltéve, hogy $mB < 10^l$. Legyen ezért l a B-től függően olyan, hogy teljesítse az

$$(n+1)B < 10^l$$

egyenlőtlenséget, ekkor C mindenesetre n-tarka az indukciós feltevés és az előbbi észrevétel alapján, sőt $(n+1)$-tarka is, ha biztosítani tudjuk, hogy $(n+1)B$ mind a 10 számjegyet tartalmazza, más szóval 1-tarka legyen. Most már tehát csak egy megfelelő B-t kell találnunk. Ha pl. k olyan egész, hogy $n < 10^k$, akkor az

$$1234567890 \cdot 10^k + j \quad (0 \le j \le n)$$

alakú egész számok 1-tarkák, és minden lehetséges maradékot kiadnak $(n+1)$-gyel osztva. Van tehát közöttük $(n+1)$-nek egy B többszöröse is, amely 1-tarka. Ezzel B-t, tehát C-t is előállítottuk, ami biztosítja az indukciós lépést és állításunk helytálló voltát.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. a) Tegyük fel, hogy az n szám tarka. Legyen az n prímtényezős felbontásában a 2, ill. az 5 kitevője α, ill. β, azaz

$$n = 2^\alpha 5^\beta n_1, \quad \text{ahol} \quad (n_1, 10) = 1.$$

Ekkor

$$n_2 = 10^{\max(\alpha,\beta)} n_1$$

is tarka, hiszen többszöröse n-nek. Az Euler–Fermat tétel szerint

$$n_1 \mid 10^{\varphi(n_1)} - 1,$$

azaz

$$n_2 \mid 10^{\max(\alpha,\beta)} \left(10^{\varphi(n_1)} - 1\right).$$

Ez azonban azt jelenti, hogy n_2-nek van olyan többszöröse, amely $\varphi(n_1)$ db 9-esből és $\max(\alpha, \beta)$ db 0-ból áll, tehát n_2 mégsem tarka. Az ellentmondás igazolja az a) állítást.

b) Megmutatjuk, hogy minden n pozitív egészhez található n-tarka szám, sőt bizonyos értelemben majdnem minden pozitív egész n-tarka. A bizonyításhoz bevezetjük a pozitív egészekből álló halmazok sűrűségének fogalmát. Ha A egy pozitív egészekből álló halmaz, akkor jelölje $A(x)$ az A halmaz x-nél nem nagyobb elemeinek a számát, továbbá értelmezzük az A sűrűségét mint

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x},$$

ha ez a határérték létezik. Azt fogjuk bizonyítani, hogy az n-tarka számok sűrűsége 1, amiből rögtön következik az is, hogy van n-tarka szám. Mindenekelőtt az 1-tarka számokról mutatjuk ki, hogy 1 sűrűségűek, más szóval 0 a sűrűsége azoknak a pozitív egészeknek, amelyek nem tartalmazzák mind a 10 számjegyet. Jelölje R ez utóbbi számok halmazát. Mivel egy x korlátot meg nem haladó pozitív egészek legfeljebb $1 + [\lg x]$ jegyűek, ezért egy adott számjegyet nem tartalmazó pozitív egészek száma x-ig legfeljebb

$$9 + 9^2 + 9^3 + \cdot + 9^{1+[\lg x]} = 9\frac{9^{1+[\lg x]} - 1}{8} < 9^{2+\lg x}.$$

Ebből rögtön adódik, hogy

$$\frac{R(x)}{x} < \frac{10 \cdot 9^{2+\lg x}}{x} = 10 \cdot 9^2 \left(\frac{9}{10}\right)^{\lg x},$$

vagyis $x \to \infty$ esetén

$$\frac{R(x)}{x} \to 0,$$

és ezt akartuk bizonyítani. Ezek után az n-tarka számokról mutatjuk meg, hogy 1 sűrűségűek, vagyis 0 a sűrűsége azoknak a pozitív egészeknek, amelyeknek valamilyen $1 \leq m \leq n$ egésszel vett szorzata R-be esik. Ha R_n jelöli ezen utóbbi számok halmazát, akkor tehát

$$R_n(x) \leq \sum_{m=1}^{n} \sum_{k \leq x mk \in R} 1 \leq \sum_{m=1}^{n} R(mx),$$

amiből

$$\frac{R_n(x)}{x} \leq \sum_{m=1}^{n} m \frac{R(mx)}{mx}.$$

Itt a bal oldal mindig nemnegatív, a jobb oldalon pedig egy olyan véges összeg áll, amelynek minden tagja 0-hoz tart, hiszen láttuk, hogy R sűrűsége 0. Végeredményben tehát a bal oldal is 0-hoz tart, ami éppen azt jelenti, hogy R_n sűrűsége 0. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A tarkaság és a feladatban felvetett probléma más s alapú számrendszerekben is megfogalmazható: mind a két módszer igazolja ebben az általános esetben is n-tarka számok létezését, továbbá hogy $s \geq 3$ mellett tarka számok nincsenek. A kettes számrendszerben ellenben minden páros szám tarka, hiszen a többszörösei 1-gyel kezdődnek és – párosak lévén – 0-ra végződnek.