I. megoldás. Megmutatjuk, hogy igenlő a válasz a feladat kérdésére. Ehhez elegendő olyan $\sqrt{c}$ számot mutatnunk a (0, 1) intervallumban, amelynek négyzete irracionális, továbbá tizedes jegyei és négyzetének tizedes jegyei között nem szerepel a 0. A nagyságrendi és a tizedes jegyekre vonatkozó feltételt teljesíti a

$$\sqrt{c} = \frac{1}{3} = 0,333\ldots$$

szám, hiszen ekkor

$$c = \frac{1}{9} = 0,111\ldots$$

Ha ezt a számot el tudjuk „rontani” úgy, hogy a négyzete már ne maradjon racionális, akkor készen vagyunk. Célszerű ezért $\sqrt{c}$-t a

$$\sqrt{c} = \frac{1}{3} + 6\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-a_k}$$

alakban keresnünk, ahol (a_k) egy különböző pozitív egészekből álló sorozat, hiszen akkor $\sqrt{c}$ továbbra is a (0, 1) intervallumban fekszik, jegyei között nem szerepel a 0 (csak a 3 és a 9 szerepel), és c is jól számolható:

$$c = \frac{1}{9} + 36\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-2a_k} + 4\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-a_k} + 72\sum_{1\le k<l} 10^{-(a_k+a_l)}$$

(hogy valóban jó eredményt ad a „minden tagot minden taggal szorzás” módszere, az a $\sqrt{c}$-t definiáló sor abszolút konvergenciájából következik). Ha a fenti formulából tudunk következtetni a c tizedestört alakjára, akkor jó eséllyel célba érünk, hiszen csak arra kell ügyelnünk, hogy a tizedes jegyek ne legyenek periodikusak, és ne is szerepeljen közöttük a 0. A formulát akkor használhatjuk kényelmesen, ha a 10-nek az összegekben fellépő kitevői páronként különbözőek, sőt legalább kettő a legkisebb különbség közöttük. Ez a helyzet valóban előidézhető, mégpedig viszonylag egyszerű megkötésekkel az (a_k) sorozatra. Könnyen adódik, hogy ha csak annyit teszünk fel a sorozat tagjairól, hogy párosak és minden tag legalább 3-szorosa az őt megelőzőnek, akkor a belőlük készíthető legfeljebb kéttagú összegek mind különbözőek (a tagok cseréjétől eltekintve), azaz legalább kettő a legkisebb különbség közöttük. Ilyenkor tehát, pl. az $(a_k) = (6^k)$ sorozatot véve, a c-t előállító összeg tizedestört alakjában a 11, 15, 47, 83 jegypárok váltogatják egymást valamilyen sorrendben, a 0 jegy mindenesetre nem fordul elő benne. A 3-as jegyek az $a_k + a_l$ $(k < l)$ alakú helyeken lépnek fel, amiért az is következik, hogy a jegyek nem periodikusak, hiszen ezen helyek között tetszőleges nagy hézagok fellépnek az (a_k) sorozat gyors növekedése miatt (az $a_l + a_{l-1}$ hely után pl. az $a_{l+1} + a_1$ a soron következő, a hézag pedig nagyobb közöttük, mint $a_{l+1} - 2a_l \ge a_l$).

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Több dolgozat alapján

II. megoldás. A Cantor-féle átlós eljárás alkalmazásával mutatjuk meg, hogy igenlő a válasz a feladat kérdésére. Tekintsük a (0, 1) intervallumbeli racionális számok négyzetgyökeit. Ez a H halmaz megszámlálható, tehát elemei sorozatba rendezhetők. Legyen a H n-edik elemének egyértelmű *végtelen* tizedestört alakja

$$0, a_{n1}a_{n2}\ldots,$$

és az átlóbeli a_{nn} jegyekből kiindulva képezzük az a_n jegyeket az

$$a_n = 5, ha$$

$\mathrm{a}_{nn} \neq 5, 6$ 7,ha $a_{nn} = 5, 6$

$$defincival.Ilymdonegy$$

$\mathrm{d}_0 = 0, a_1a_2\ldots szmhozjutunk, amelyblmostd_n = 0, b_1b_2\ldots b_na_{n+1}a_{n+2}\ldots alakszmokatfogunkkpeznigy, hogya\mathrm{d}_n^2$ első n tizedes jegye mind különbözzék a 0-tól, továbbá

$$b_n = a_n \quad \text{vagy} \quad a_n + 1$$

mindig teljesüljön. Szemléletesen tehát a d_0 tizedes jegyein megyünk végig és néha 1-gyel megnöveljük a soron lévő jegyet. A kérdés az, hogy a b_n jegyeket hogyan képezzük. Ha feltesszük, hogy a $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ jegyeket már meghatároztuk és d_{n-1}^2 n. tizedes jegye nem 0 (amiként az első $n-1$ jegy természetesen nem az), akkor b_n-et választhatjuk a_n-nek (amikor is $d_n = d_{n-1}$). Ha nem, akkor legyen $b_n = a_n + 1$, ezzel ugyanis

$$d_n^2 = (d_{n-1} + 10^{-n})^2 = d_{n-1}^2 + 2d_{n-1}10^{-n} + 10^{-2n},$$

ahonnan

$$0,5 \le d_0 \le d_{n-1} < 1$$

felhasználásával

$$d_{n-1}^2 + 10^{-n} < d_n^2 < d_{n-1}^2 + 3 \cdot 10^{-n},$$

ami azt jelenti, hogy d_n^2 és d_{n-1}^2 első $n-1$ tizedes jegye megegyezik (amelyek persze nemnullák), továbbá d_n^2 n. tizedes jegye 1 vagy 2. Ezzel megmutattuk, hogy a b_n jegyek és velük egyetemben a d_n számok meghatározhatók a fenti módon.

Legyen most

$$d = 0{,}b_1 b_2 \ldots$$

Megmutatjuk, hogy ennek négyzete, c megfelel a feladat feltételeinek. Világos, hogy $\sqrt{c} = d$ jegyei között csak 5, 6, 7 és 8 szerepel, speciálisan, nem szerepel a jegyek között a 0, továbbá d, tehát c is a (0, 1) intervallumban fekszik. Az is világos, hogy d nem eleme a megoldás elején definiált H halmaznak, hiszen ha pl. d a H n. eleme lenne, akkor végtelen tizedes tört alakjában az n. jegy, b_n megegyeznék a_{nn}-nel, ami a_n, majd b_n származtatása alapján lehetetlen. Tehát $d \notin H$, más szóval $c = d^2$ irracionális. Végezetül a nyilvánvaló

$$d = \lim d_m$$

összefüggésből adódik, hogy

$$c = d^2 = \lim d_m^2$$

jegyei között nem szerepel a 0, hiszen $m \geq n$ esetén d_m^2 első n jegye nemnulla, vagyis ugyanez teljesül c-re is, de az n tetszőlegesnek választható. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Mindkét megoldás módszere alkalmas annak igazolására is, hogy a feladatbeli feltételt kielégítő c-k számossága kontinuum.