A bizonyítás során az $|f(1)|, \ldots, |f(2n)|$ értékek egy súlyozott összegét fogjuk alulról becsülni $f(0)=n$ segítségével.

Először bebizonyítjuk, hogy léteznek olyan b_0, b_1, $\ldots$, b_{2n} valós számok, amelyek nem mind 0-k, és amelyekkel minden x-re teljesül, hogy

$$b_0 f(x) + b_1 f(x+1) + \cdots + b_{2n} f(x+2n) = 0. \tag{2}$$

Az (1) jobb oldalán levő tagokra az ismert trigonometrikus összefüggések alapján nem nehéz hasonló azonosságot találni. Például minden a valós számra

$$\cos a(x-1) - 2\cos a \cos ax + \cos a(x+1) = 0. \tag{3}$$

Tekintsük a következő polinomot:

$$P(u) = \prod_{j=1}^{n} \left(u^2 - 2(\cos a_j)u + 1\right) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \cdots + b_{2n} u^{2n}.$$

Azt állítjuk, hogy ennek együtthatói megfelelőek lesznek, sőt a (2) azonosság tagonként teljesül, vagyis minden $1 \le i \le 2n$-re

$$b_0 \cos a_i x + b_1 \cos a_i(x+1) + \cdots + b_{2n} \cos a_i(x+2n) = 0. \tag{4}$$

Írjuk fel P-t a következő alakban:

$$P(x) = \left(u^2 - 2(\cos a_i)u + 1\right)\left(c_0 + c_1 u + \cdots + c_{2n-2}u^{2n-2}\right).$$

A (3) azonosság alapján

$$c_{j-1}\left(\cos a_i(x+j-1) - 2\cos a_i \cos a_i(x+j) + \cos a_i(x+j+1)\right) = 0 \qquad (1 \le j \le 2n-1),$$

Ezeknek az egyenleteknek az összege pedig éppen (4).

Válasszuk ki most a b_i együtthatók közül az (egyik) legnagyobb abszolút értékűt; legyen ez b_m. A (2) azonosságot $x=-m$ választással írjuk fel a következő alakban:

$$b_m f(0) = \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ j \ne m}} -b_j f(j-m).$$

Mivel b_j maximális abszolut értékű, azért a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával

$$f(0) = \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ j \ne m}} -\frac{b_j}{b_m} f(j-m) \le \sum_{\substack{0 \le j \le 2n \\ j \ne m}} |f(j-m)| \le 2n \max_{1 \le |k| \le 2n} |f(k)|.$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy $f(0)=n$ és f páros függvény, akkor az egyenlőtlenség két szélső fele $2n$-nel való osztás után éppen az állítást eredményezi:

$$\frac{1}{2} \le \max_{1 \le k \le 2n} |f(k)|.$$

Megjegyzések. 1. Az $f(0)$, $f(1)$, $\ldots$ sorozat $2n$ darab (komplex hányadosú) mértani sorozat összege, az ilyenekre mindig lehet (2) alakú lineáris rekurziót találni. A P polinom valójában a lineáris rekurzív sorozat karakterisztikus polinomja, melynek gyökei a mértani sorozatok hányadosai.

2. Az egyenlőtlenség éles. Ha minden $1 \le j \le n$-re $a_j = \dfrac{j}{2n+1} \cdot 2\pi$, és x egész szám, de nem osztható $(2n+1)$-gyel, akkor

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \cos \frac{jx}{2n+1} \cdot 2\pi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin \frac{(j+\frac12)x}{2n+1} \cdot 2\pi - \sin \frac{(j-\frac12)x}{2n+1} \cdot 2\pi}{2 \sin \frac{\frac12 x}{2n+1} \cdot 2\pi} =$$

$$= \frac{\sin \frac{(n+\frac12)x}{2n+1} \cdot 2\pi - \sin \frac{\frac12 x}{2n+1} \cdot 2\pi}{2 \sin \frac{\frac12 x}{2n+1} \cdot 2\pi} = \frac{\sin x\pi}{2 \sin \frac{\frac12 x}{2n+1} \cdot 2\pi} - \frac{\sin \frac{\frac12 x}{2n+1} \cdot 2\pi}{2 \sin \frac{\frac12 x}{2n+1} \cdot 2\pi} = -\frac{1}{2}.$$