A feladat állítását tetszőleges négyszögre bizonyítjuk, mégpedig többféle módon. A bizonyításokhoz bevezetünk néhány jelölést. Ha X, Y, Z egy egyenesen lévő különböző pontok, akkor jelölje (X, Y, Z) az XZ/ZY *osztóviszonyt*, amit a megoldás során mindig irányított szakaszok hányadosaként értelmezünk, azaz pozitívnak ha Z az XY szakasz belső pontja és negatívnak egyébként. Az egy egyenesen lévő X, Y, Z, V pontok *kettősviszonya* legyen

$$(XYZV) = \frac{(XYZ)}{(XYV)},$$

ekkor könnyen látható, hogy

$$(XYZV) = \frac{1 - VZ/VX}{1 - VZ/VY},$$

vagyis $(XYZV) = -1$ pontosan azt jelenti, hogy VZ harmonikus közepe VX-nek és VY-nak. Végezetül nyomban következik, hogy

$$(YXZV) = (XYVZ) = \frac{1}{(XYZV)},$$

némi fáradsággal pedig

$$(XZYV) = 1 - (XYZV).$$

I. megoldás. A PAD háromszögre vonatkozó Menelaosz-tétel megfordítása szerint a bizonyítandó állítás az

$$(APE)(PDF)(DAQ) = -1 \tag{1}$$

alakba írható. Másrészt, mivel a B, C, Q pontok egy egyenesen vannak, megint csak a PAD háromszögre vonatkozó Menelaosz-tétel szerint

$$(APB)(PDC)(DAQ) = -1.$$

Azt kell tehát igazolnunk, hogy

$$(APE)(PDF) = (APB)(PDC),$$

azaz

$$(APEB) = (PDCF).$$

A bevezető megjegyzések szerint a bal oldal

$$\frac{1}{(APBE)} = \frac{1}{1 - (ABPE)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(ABEP)}} = \frac{1}{2},$$

a jobb oldal pedig

$$\frac{1}{(DPCF)} = \frac{1}{1 - (DCPF)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(DCFP)}} = \frac{1}{2}.$$

Megjegyzések. 1. Nevezzük az egy egyenesen lévő $A_1, A_2, \ldots$ pontokat és az ugyancsak egy egyenesen lévő $B_1, B_2, \ldots$ pontokat a P pontra nézve *perspektívnek*, ha az A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$ egyenesek mind átmennek a P ponton. Erre a relációra bevezetjük az

$$A_1A_2\ldots \underset{\wedge}{\overset{P}{=}} B_1B_2\ldots$$

jelölést. Az előző megoldásban lényegében azt láttuk be, hogy ha $AEBP \underset{\wedge}{\overset{Q}{=}} DFCP$, akkor $(AEBP) = (DFCP)$. Ennek az állításnak a többszöri alkalmazásával azt is beláthatjuk, hogy ha S jelöli az AC és a BD átló metszéspontját, akkor a QS egyenes megegyezik az EF egyenessel. Messe ui. a QS egyenes az AB-t az E' pontban, DC-t az F' pontban, ekkor

$$ABE'P \underset{\wedge}{\overset{S}{=}} CDF'P \underset{\wedge}{\overset{Q}{=}} BAE'P,$$

vagyis

$$(ABE'P) = (BAE'P) = \frac{1}{(ABE'P)}, \qquad (ABE'P)^2 = 1.$$

Mivel E' különbözik P-től, ezért $(ABE'P) \neq 1$, tehát csakis

$$(ABE'P) = -1 = (ABEP)$$

lehetséges, amiből $E' = E$ következik. Ugyanígy $F' = F$, és ezt akartuk igazolni.

2. Előző eredményünket úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha egy négyszög (esetünkben $QDSC$) 2–2 szemköztes oldala az A és B pontokban metszik egymást, akkor a négyszög átlói az AB egyenest olyan E és P pontokban metszik, amelyre $(ABEP) = -1$. Az ilyen pontnégyeseket *harmonikusnak* hívjuk, ill. azt mondjuk, hogy az A, B és E, P pontpárok

harmonikusak egymásra vagy, hogy P az E (ill. E a P) *harmonikus társa* az A és B pontokra nézve. A bevezetőbeli megjegyzések alapján ezek a relációk – ahogyan elnevezésük sejteti – tényleg szimmetrikusak a pontpárokban és a pontpárok tagjaiban. Ez a négyszögekkel kapcsolatos észrevétel módot ad a harmonikus pontnégyeseknek a kettősviszony *analitikus* fogalmától független, ún. *szintetikus* tárgyalására.

II. megoldás. Mint láttuk, elegendő megmutatnunk, hogy ha két pontnégyes perspektív egymásra, akkor kettősviszonyuk megegyezik. Ez az állítás könnyen visszavezethető arra az esetre, amikor a pontnégyesek utolsó tagjai megegyeznek, vagyis az előző megoldáshoz fűzött megjegyzések ezt az általánosabb állítást is igazolják. Mi most új bizonyítást adunk erre az állításra. Ha x és y tetszőleges egyenesek, akkor jelölje xy az általuk bezárt irányított szög szinuszát (tehát $yx=-xy$).

Tegyük fel, hogy

$$X_1X_2X_3X_4 \underset{\wedge}{\overset{T}{=}} X_1'X_2'X_3'X_4'.$$

Ha az

$$x_i = TX_i = TX_i' \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

egyenesek *kettősviszonyát*

$$(x_1x_2x_3x_4) = \frac{x_1x_3}{x_3x_2}\cdot\frac{x_4x_2}{x_1x_4}$$

értelmezi, akkor elegendő belátnunk, hogy

$$(X_1X_2X_3X_4) = (x_1x_2x_3x_4),$$

hiszen akkor ugyanúgy

$$(X_1'X_2'X_3'X_4') = (x_1x_2x_3x_4)$$

is teljesül.

Jelölje x az $X_1X_2X_3X_4$ egyenest. Ekkor az irányított háromszögekre vonatkozó szinusztétel többszöri alkalmazásával

$$(X_1X_2X_3X_4) = \frac{X_1X_3}{X_3X_2}\cdot\frac{X_4X_2}{X_1X_4} = \frac{X_1X_3/X_3T}{X_3X_2/X_3T}\cdot\frac{X_4X_2/X_4T}{X_1X_4/X_4T} =$$
$$= \frac{x_1x_3/xx_1}{x_3x_2/xx_2}\cdot\frac{x_4x_2/xx_2}{x_1x_4/xx_1} = \frac{x_1x_3}{x_3x_2}\cdot\frac{x_4x_2}{x_1x_4} = (x_1x_2x_3x_4).$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

III. megoldás. Az ideális térelemekkel kibővített euklideszi síkon fogunk dolgozni. Ha a harmonikus pontnégyeseket a négyszögek segítségével (szintetikus úton) vezetjük be, akkor rögtön látszik, hogy egy projektív transzformáció – illeszkedés-tartó lévén – a harmonikus pontnégyeseket harmonikusakba viszi át. A paralelogramma példája mutatja, hogy egy ideális pont harmonikus társa egy X,Y pontpárra nézve az XY szakasz felezőpontja. Az ABCD négyszöget ezért érdemes projektív transzformációval egy paralelogrammába átvinni, ekkor ui. mind P, mind Q ideális pontokká válnak, és a feladat állítása azzal lesz egyenértékű, hogy az AB szakasz E és a DC szakasz F felezőpontját összekötő egyenes – a paraleolgramma egyik középvonala – párhuzamos a BC és DA oldalegyenesekkel, ami viszont nyilvánvaló. Ebből a megoldásból is leolvasható, hogy az EF egyenes azonos a QS-sel.