**I. megoldás.** Legyen $f_1=1$, $f_2=1$, $f_3=2$, $f_4=3$, $f_5=5$, $f_6=8$, $\dots$ a Fibonacci-sorozat. Azt állítjuk, hogy az $(f_{2k+1},f_{2k+3})$ alakú számpárok megfelelők lesznek. Mivel ezek a számpárok páronként különbözőek, a konstrukció végtelen sok megoldást állít elő.

Bebizonyítjuk, hogy minden $k$ pozitív egészre

$$f_{2k+1}^2+1=f_{2k-1}f_{2k+3}. \tag{1}$$

Ebből állításunk következik, mert

$$\frac{f_{2k+1}^2+1}{f_{2k+3}}=f_{2k-1} \quad \text{és} \quad \frac{f_{2k+3}^2+1}{f_{2k+1}}=f_{2k+5}$$

is egész szám lesz.

Az (1) azonosságot teljes indukcióval igazoljuk. Az állítás igaz $k=1$-re, mert $f_3^2+1=2^2+1=1\cdot 5=f_1f_5$. Tegyük fel, hogy (1) valamilyen $k$-ra teljesül, és hogy $m\ge 3$ esetén

$$\begin{aligned} f_{m+2}+f_{m-2}&=f_{m+1}+f_m+f_{m-2}=(f_m+f_{m-1})+f_m+f_{m-2}=\\ &=2f_m+(f_{m-1}+f_{m-2})=3f_m, \end{aligned}$$

ebből következik az állítás $(k+1)$-re:

$$\begin{aligned} f_{2k+3}^2+1&=\left(f_{2k+3}^2-f_{2k+1}^2\right)+\left(f_{2k+1}^2+1\right)=f_{2k+3}^2-f_{2k+1}^2+f_{2k-1}f_{2k+3}=\\ &=f_{2k+3}^2-f_{2k+1}^2+(3f_{2k+1}-f_{2k+3})\,f_{2k+3}=f_{2k+1}\left(3f_{2k+3}-f_{2k+1}\right)=f_{2k+1}f_{2k+5}. \end{aligned}$$

Az (1) azonosság tehát minden $k$-ra teljesül.

*Valkó Benedek* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

*Megjegyzés.* Az (1) azonosság a Fibonacci-sorozat alábbi ismert explicit alakjából is bebizonyítható:

$$f_k=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt5}.$$

**II. megoldás.** Ha $m\mid n^2+1$ és $n\mid m^2+1$, akkor $m$ és $n$ relatív prímek. Ha ugyanis $m$ és $n$ legnagyobb közös osztója $d$, akkor $d\mid m\mid n^2+1$ miatt $d\mid 1$. Mivel $m^2+n^2+1$ osztható $m$-mel és $n$-nel is, a relatív prímség miatt osztható $mn$-nel is. Megfordítva, ha $m^2+n^2+1$ osztható $mn$-nel, akkor osztható $m$-mel és $n$-nel is, amiből következik, hogy $m\mid n^2+1$ és $n\mid m^2+1$. A feltétel tehát azzal ekvivalens, hogy $m^2+n^2+1$ osztható $mn$-nel.

Legyen $a$ pozitív egész, és tekintsük az

$$x^2+y^2+1=axy \tag{2}$$

egyenletet. Azt állítjuk, hogy ha ennek van pozitív egészekből álló megoldása, akkor végtelen sok is van. Ebből az állítás azonnal következik. Tegyük fel, hogy $(x_0,y_0)$ egy megoldása (2)-nek, és $x_0\le y_0$. Ha (2)-t egy paraméteres másodfokú egyenletnek tekintjük, amelyben $x$ az ismeretlen, akkor az egyenlet egyik gyöke $x_0$, a másik pedig a gyökök és együtthatók közötti összefüggések (Vièta formulák) alapján

$$x_1=ay_0-x_0=\frac{y_0^2+1}{x_0}.$$

Az első formula alapján ez a gyök is egész, a második szerint pedig pozitív, sőt

$$x_1=\frac{y_0^2+1}{x_0}>\frac{y_0^2}{y_0}=y_0.$$

A (2) egyenletnek ezért az $(x_1,y_0)$ számpár egy újabb, pozitív egészekből álló megoldása, amelyben a két szám összege nagyobb, mint az előzőben: $x_1+y_0>x_0+y_0$. A megoldások között tehát nincs olyan, amelyben a két ismeretlen összege maximális.

Ha $a=3$, akkor (2)-nek van megoldása, például $x=y=1$. Az előbbiek szerint ebből következik, hogy végtelen sok olyan $(m,n)$ számpár van, amelyre teljesül, hogy $m^2+n^2+1=3mn$.

*Tóth Gábor Zsolt* (Budapest, Árpád Gimn., III. o.t.) és *Braun Gábor* (Budapest, Szent István Gimn., II. o.t) dolgozata nyomán

*Megjegyzések.* 1. A két megoldás lényegében ugyanazokat a számpárokat adja. A II. megoldásban adott konstrukció ugyanis az $(m,n)$ számpárból az $(n,3m-n)$ számpárt állítja elő, ami megfelel az $f_{m+2}=3f_m-f_{m-2}$, rekurziónak. Az $(1,1)$ számpárt az I. megoldás is előállítja, ha bevezetjük az $f_0=0$, $f_{-1}=1$ elemeket.

2. A második megoldás módszerével nem nehéz bebizonyítani, hogy más megoldás nincs. Ehhez először azt mutatjuk meg, hogy (2)-nek csak $a = 3$ esetén van pozitív egészekből álló megoldása. Tekintsünk egy olyan $(x_0, y_0)$ megoldást, amelyben $x_0+y_0$ minimális. Ha $x_0 = y_0 = 1$, akkor $a = 3$ és kész vagyunk. Ellenkező esetben feltehetjük, hogy $x_0 > y_0$ (egyenlők nem lehetnek, mert relatív prímek). Definiáljuk most ismét az

$$x_1 = ay_0 - x_0 = \frac{y_0^2+1}{x_0}$$

számot. Ez ismét pozitív egész lesz, de ezúttal

$$x_1 = \frac{y_0^2+1}{x_0} \le \frac{y_0^2+y_0}{y_0+1} = y_0 < x_0.$$

Az $(x_1, y_0)$ számpár tehát olyan pozitív egészekből álló megoldás, amelyben $x_1+y_0 < x_0+y_0$. Ez viszont ellentmondás, mert feltettük, hogy $x_0 + y_0$ minimális.

Ezután már nem nehéz bebizonyítani, hogy ha $x \le y$ egy megoldása (2)-nek, akkor $x = f_{2k-1}$ és $y = f_{2k+1}$ valamilyen $k$ nemnegatív egésszel. Ez ismét teljes indukcióval történhet. Ha $x+y \le 2$, akkor az állítás triviális. Tegyük fel, hogy igaz $x + y < M$ esetén. Ebből bebizonyítjuk $x + y = M$-re is.

Legyen $x < y$ egy olyan megoldása (2)-nek, amelyben $x + y = M$ és $M \ge 4$. Mivel az $(x, 3x - y) = (x, \frac{x^2+1}{y})$ is pozitív egészekből álló megoldás, de ebben $\frac{x^2+1}{y} < x$ és $x + \frac{x^2+1}{y} < x + y = M$, az indukciós feltevés szerint létezik olyan $k$ nemnegatív egész szám, amelyre $3x - y = f_{2k+1}$ és $x = f_{2k+3}$. Ebből viszont következik, hogy $y = 3f_{2k+3} - f_{2k+1} = f_{2k+5}$.