Legyenek a számok $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$. Megmutatjuk, hogy minden $k = 1, 2, \ldots, n$-re $a_k \le n^{2^{k-1}}$. Ebből az állítás azonnal következik.

Állításunk $k = 1$-re azt mondja, hogy $a_1 \le n$. Ez nyilvánvaló, ugyanis

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \le \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_1} = \frac{n}{a_1}.$$

Tegyük fel, hogy állításunkat igazoltuk már minden $k \le k_0$-ra $(1 \le k_0 < n)$, azaz $1 \le k \le k_0$ esetén $a_k \le n^{2^{k-1}}$. Írjuk fel $a_1, \ldots, a_{k_0}$ reciprokösszegét közönséges, tovább nem egyszerűsíthető tört alakban:

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{k_0}} = \frac{A}{B}.$$

Ez a kifejezés kisebb 1-nél, ugyanakkor a nevezője, B legfeljebb akkora, mint a bal oldalon álló $a_1, \ldots, a_{k_0}$ nevezők szorzata. Ebből és az indukciós feltevésből következik, hogy

$$\frac{1}{a_{k_0+1}} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{A}{B} \ge \frac{1}{B} \ge \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{k_0}} \ge \frac{1}{n^{2^0} \cdot n^{2^1} \cdot \ldots \cdot n^{2^{k_0-1}}} = \frac{1}{n^{2^{k_0}-1}}.$$

A bal oldalon álló tagok közül $\dfrac{1}{a_{k_0+1}}$ a legnagyobb, ezért

$$\frac{1}{n^{2^{k_0}-1}} \le \frac{1}{a_{k_0+1}} + \ldots + \frac{1}{a_n} \le \frac{n-k_0}{a_{k_0+1}},$$

amiből

$$a_{k_0+1} \le (n-k_0) n^{2^{k_0}-1} < n^{2^{k_0}}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.