Ha a húrnégyszög oldalait a, b, c, d, félkerületét s jelöli, akkor a húrnégyszögekre vonatkozó Héron-képlet szerint a feltétel

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = a+b+c+d$$

alakba írható. Ha s nem lenne egész szám, akkor a bal oldalon a gyökjel alatt minden tényező egy páratlan szám fele lenne, ilyenek szorzata azonban nemhogy négyzetszám, de egész sem lehetne. Betűzzük rendre x, y, v, z-vel a tényezőket. Ezek tehát egész számok, sőt pozitívak is a háromszög-egyenlőtlenség alapján, és teljesül rájuk az

$$xyvz = (x+y+v+z)^2 \tag{1}$$

összefüggés. A bal oldal foka magasabb az ismeretlenekben, mint a jobb oldalé, ezért várható, hogy csak véges sok pozitív egész megoldása van az egyenletnek. A megoldások felkutatására a következő stratégiát választjuk. Feltehetjük, hogy

$$x \le y \le v \le z. \tag{2}$$

Először megmutatjuk, hogy csak véges sok $(x,\ y)$ számpár jöhet szóba, majd minden ilyen számpár esetén egy véges intervallumba szorítjuk a v lehetséges értékeit. Rögzített $(x,\ y,\ v)$ mellett pedig egyenletünk egyszerű másodfokú egyenlet alakját ölti a fennmaradó z ismeretlenben, aminek általában nincsen pozitív egész megoldása. Ezt néha számolással kell majd ellenőriznünk, a legtöbb esetet azonban kizárhatjuk az alábbi egyszerű észrevétellel:

$$x+y+v \qquad \text{nem prím.} \tag{3}$$

Valóban, (1) jobb oldala nagyobb 1-nél, tehát z osztható valamilyen p prímszámmal. Ez a p osztja $(x+y+v+z)$-t, vagyis $(x+y+v)$-t is, de akkor $x+y+v$ csak úgy lehetne prím, ha p-vel lenne egyenlő, amit kizár a nyilvánvaló

$$z < x+y+v \tag{4}$$

egyenlőtlenség.

Írjuk fel mindenekelőtt a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget a (4) szerint különböző $x+y+v$ és z számokra, ekkor (1)-et is figyelembe véve

$$4(x+y+v)z < (x+y+v+z)^2 = xyvz,$$

azaz

$$4(x+y) < (xy-4)v$$

következik. Mivel $x+y$ és v pozitív, azért a jobb oldalon $4 < xy$, továbbá

$$4\frac{x+y}{xy-4} < v. \tag{5}$$

Vezessük be a $\lambda = \dfrac{x+y+v}{z}$, $\mu = \dfrac{x+y+v}{v}$ jelöléseket. Ekkor $1 < \lambda \le \mu$, továbbá (1)-ből

$$xy = \frac{(x+y+v+z)^2}{z^2}\frac{z}{v} = (\lambda+1)^2\frac{\mu}{\lambda}.$$

Itt $(\lambda+1)^2/\lambda - (\mu+1)^2/\mu = (\lambda-\mu)(1-1/\mu\lambda) \le 0$, vagyis

$$xy \le (\mu+1)^2,$$

amiből egyrészt

$$xy \le \left(3+\frac{x}{y}\right)^2, \tag{6}$$

másrészt

$$\sqrt{xy} - 2 \le \mu - 1 = \frac{x+y}{v}.$$

Ezt a már ismert $4 < xy$ egyenlőtlenséggel egybevetve

$$v \le \frac{x+y}{\sqrt{xy}-2}.$$

Az alsó egészrész jelével a v-re nyert felső becslést egybefűzhetjük a (2) és (5) alsó becslésekkel:

$$\max\left(y, 1+\left\lfloor 4\frac{x+y}{xy-4}\right\rfloor\right) \le v \le \left\lfloor \frac{x+y}{\sqrt{xy}-2}\right\rfloor. \tag{7}$$

Mindezen előkészületek után már megkereshetjük az (1) egyenlet pozitív egész megoldásait a (2) és (4) feltevés mellett. A következőképpen járunk el. Láttuk, hogy $xy \geq 5$, továbbá (6)-ből azonnal következik, hogy $xy \leq (3+1)^2 = 16$. Ez a feltétel persze nem elégséges (6) teljesüléséhez, hiszen (6) arról is szól, hogy hacsak $9 < xy$, akkor x/y nem lehet túl kicsi, azaz x-nek és y-nak valamennyire közel kell lennie egymáshoz. Valójában a következő pozitív egész (x, y) számpárok tesznek eleget a (2), a (6) és az $xy \geq 5$ feltételeknek:

$$(3,4), \quad (2,5), \quad (1,9), \quad (3,3), \quad (2,4), \quad (1,7), \quad (1,6), \quad (2,3), \quad (1,5).$$

Ezek mindegyike előír egy (7) szerinti intervallumot a v számára. Sok v már a (3) alapján kiesik a listából. A fennmaradó esetek közül kiválogatjuk azokat, amelyekben (1)-nek mint másodfokú egyenletnek (4)-et kielégítő pozitív egész z megoldása van. Az összes esetet számba véve (1)-(2)-(4)-nek 4 megoldása van pozitív egészekben:

$$(x,\ y,\ v,\ z) = (4,\ 4,\ 4,\ 4), \quad (2,\ 5,\ 5,\ 8), \quad (1,\ 9,\ 10,\ 10), \quad (3,\ 3,\ 6,\ 6),$$

amelyek rendre az

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (4,\ 4,\ 4,\ 4), \quad (8,\ 5,\ 5,\ 2), \quad (14,\ 6,\ 5,\ 5), \quad (6,\ 6,\ 3,\ 3)$$

oldalnégyesekhez tartoznak.

Most megmutatjuk, hogy ezek az oldalnégyesek összesen 7 db húrnégyszöget határoznak meg (egybevágóság erejéig). A $(4,4,4,4)$ oldalnégyeshez kizárólag egy négyzet tartozik húrnégyszögként, azért elegendő belátnunk, hogy a fennmaradó 3 db négyeshez egyenként 2-2 db húrnégyszög tartozik. Átrendezés után mindhárom négyes (a,b,b,c) alakú, ahol $a \neq b \neq c$ és $|a-c| < 2b$. Egy ilyen négyesből mint oldalakból húrtrapéz szerkeszthető, mégpedig egyértelműen. A trapéznak valamelyik átlófelező merőlegesére tükrözve az átlót közrefogó valamelyik két oldalt, olyan másik húrnégyszöghöz jutunk, amelynek oldalai továbbra is (a,b,b,c), de most a b hosszú oldalak közös csúcsból indulnak ki. Fordítva, ha egy húrnégyszög oldalai valamilyen sorrendben (a,b,b,c), akkor vagy átellenesek a b hosszú oldalak, ekkor a már megszerkesztett trapézról van szó; vagy közös csúcsból indulnak ki, ekkor az ebből a csúcsból kiinduló átló felezőmerőlegesére tükrözve az átlót közrefogó valamelyik két oldalt, visszakerülünk a húrtrapéz esetéhez. Ilyenkor tehát a kiindulási négyszög szükségképpen a már megszerkesztett másik húrnégyszöggel egybevágó.

Ezzel a feladatot megoldottuk, meghatároztuk mind a 7 olyan húrnégyszöget, amelynek oldalai egész számok, és területének és kerületének mértékszáma megegyezik.

Burcsi Péter (Pápa, Türr István Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján