$n = 1$-re 1-féle eljutás van, $1 < 9^1$.

Rendeljünk minden úthoz egy betűsort a következők alapján: Az első betű J (jobb) vagy L (le) aszerint, hogy a bástya merre indul el. A következők pedig: T (tovább), ha megállás nélkül áthalad az adott mezőn, J vagy L, ha megáll és jobbra, illetve lefelé halad tovább.

Nyilván így különböző „eljutásokhoz" különböző betűsort rendeltünk. A betűsorok hossza $2n-2$, így a különböző betűsorok száma $2 \cdot 3^{2n-3} < 9^n$. Ezzel a feladat első részét beláttuk.

Tekintsük az összes $k \times l$-es táblát, ahol $k + l = 2n$. Legyen egy $k \times l$-es táblán az eljutások szám $N_{k,l}$. Ekkor $\sum\limits_{k+l=2n} N_{k,\,l} = 2 \cdot 3^{2n-3}$, mivel egy–egy értelmű megfeleltetés van az ilyen utak és betűsorok között. Azt szeretnénk belátni, hogy a $k \times l$-es téglalapok közül a négyzetben lehetséges a legtöbb féle út. Ha ez teljesül, akkor a 9 nem helyettesíthető kisebb számmal, mert a különböző méretű táblák száma $2n-1$, így ekkor a négyzeten legalább $\dfrac{2 \cdot 3^{2n-3}}{2n-1}$ eljutás van, és tetszőleges $c < 9$ szám esetén – ha az n elég nagy – $\dfrac{2 \cdot 3^{2n-3}}{2n-1} > c^n$.

Egy $k \times l$-es táblán 2-féle eljutás van aszerint, hogy az irányváltoztatások száma páros vagy páratlan.

Legyen először az irányváltoztatások száma $2m-1$ ($m \geq 1$ egész). Ha jobbra indulok: a jobbra megtett szakaszok száma m, hosszaik összege nyilván $k-1$. Ismert, hogy a $k-1$ szám $\binom{k-2}{m-1}$-féleképpen bontható fel m pozitív egész összegére (ha a sorrend is számít). Hasonló módon a lefelé megtett szakaszokra $\binom{l-2}{m-1}$-et kapunk. Így ennyi irányváltoztatás mellett az útvonalak száma $\binom{k-2}{m-1}\binom{l-2}{m-1}$. Azonban különbséget kell tennünk két útvonal között aszerint is, hogy hol állunk meg. Az útvonal $k+l-2$ hosszú, az elején és az irányváltoztatásoknál nincs választási lehetőség, a maradék $(k+l-2)-1-(2m-1) = k+l-2-2m$ mezőnél eldönthetjük, hogy megállunk, vagy megállás nélkül továbbhaladunk.

Tehát a lehetőségek száma $\binom{k-2}{m-1}\binom{l-2}{m-1} \cdot 2^{k+l-2-2m}$.

Ugyanezt kapjuk, ha a bástya lefelé indul el, tehát a lehetőségek száma összesen (rögzített m esetén) $\binom{k-2}{m-1}\binom{l-2}{m-1} \cdot 2^{k+l-1-2m}$.

Most legyen az irányváltozások száma $2m$. Ha jobbra indul, akkor az előzőekhez hasonlóan $m+1$ vízszintes és m függőleges szakasz van, és hogy megállunk-e, azt $(k+l-2)-1-2m = k+l-3-2m$ mezőnél dönthetjük el, így a lehetőségek száma $\binom{k-2}{m}\binom{l-2}{m-1} \cdot 2^{k+l-3-2m}$. Hasonló módon, ha lefelé indul el, akkor a lehetőségek száma $\binom{k-2}{m-1}\binom{l-2}{m} \cdot 2^{k+l-3-2m}$.

Elég bebizonyítani, hogy a négyzetnél van a legtöbb lehetőség, tehát elég bebizonyítani, hogy minden m-re

$$\binom{k-2}{m-1}\binom{l-2}{m-1} \cdot 2^{k+l-2-2m} \leq \binom{n-2}{m-1}\binom{n-2}{m-1} 2^{n+n-2-2m},$$

illetve

$$\left(\binom{k-2}{m}\binom{l-2}{m-1} + \binom{k-2}{m-1}\binom{l-2}{m}\right) \cdot 2^{k+l-3-2m} \leq$$
$$\leq \left(2 \cdot \binom{n-2}{m}\binom{n-2}{m-1}\right) \cdot 2^{n+m-3-2m}.$$

Mivel $k + l = n + n$, azért elég bebizonyítani, hogy

$$\binom{k-2}{m-1}\binom{l-2}{m-1} \leq \binom{n-2}{m-1}^2 \qquad \text{és}(1) \binom{k-2}{m}\binom{l-2}{m-1} + \binom{k-2}{m-1}\binom{l-2}{m} \leq 2 \cdot \binom{n-2}{m}\binom{n-2}{m-1} (2)$$

A számtani–mértani közép egyenlőtlensége alapján $kl \leq \left(\dfrac{k+l}{2}\right)^2$, így minden c-re

$$kl - c(k+l) + c^2 \leq \left(\frac{k+l}{2}\right)^2 - c(k+l) + c^2,$$

azaz $(k-c)(l-c) \leq \left(\dfrac{k+l}{2} - c\right)^2$. Így

$$\prod_{c=2}^{m} (k-c)(l-c) \leq \prod_{c=2}^{m} (n-c)^2,$$

azaz

$$(k-2)(k-3)\ldots(k-2-m+2)\cdot(l-2)(l-3)\ldots(l-2-m+2)\leq$$
$$\leq(n-2)(n-3)\ldots(n-2-m+2).$$

Mindkét oldalt elosztva $((m-1)!)^2$-nel, éppen az (1) egyenlőtlenséget kapjuk.

Az (1) mindkét oldalát megszorozva $\frac{k-m-1}{m}+\frac{l-m-1}{m}=2\cdot\frac{n-m-1}{m}$-mel:

$$\binom{k-2}{m-1}\cdot\frac{k-m-1}{m}\binom{l-2}{m-1}+\binom{k-2}{m-1}\binom{l-2}{m-1}\cdot\frac{l-m-1}{m}\leq$$
$$\leq 2\binom{n-2}{m-1}\binom{n-2}{m-1}\cdot\frac{n-m-1}{m},$$
$$\binom{k-2}{m}\binom{l-2}{m-1}+\binom{k-2}{m-1}\binom{l-2}{m}\leq 2\binom{n-2}{m-1}\binom{n-2}{m}.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

Burcsi Péter (Pápa, Türr I. Gimn., III. o.t.)