Megmutatjuk, hogy nincs négy ilyen pont a síkon. Indirekten bizonyítunk: tegyük fel, hogy mégis van négy pont a síkon, hogy bármely kettő távolsága páratlan egész.

Nyilván semelyik három pont nem eshet egy egyenesbe, mert ha A, B, C egy egyenesen van, akkor AB vagy $AC+BC$-vel vagy $|AC-BC|$-vel egyenlő, és ha AC és BC páratlan, akkor ez biztos páros lesz. Tehát semelyik három pont sem eshet egy egyenesre, így a négy pont konvex burka négyszög vagy háromszög.

Tekintsük először azt az esetet, amikor négyszög a konvex burok (*1. ábra*). Legyen a négy pont A, B, C, D, és jelöljük a köztük fellépő távolságokat x, y, z, p, q, r-rel az ábrán látható módon. Legyen továbbá $ABD\sphericalangle = \alpha$, $DBC\sphericalangle = \beta$ és $ABC\sphericalangle = \gamma$. (Látható, hogy $\alpha+\beta=\gamma$.) A koszinusz-tételből

$$\cos\alpha = \frac{x^2+y^2-r^2}{2xy},\ \cos\beta = \frac{y^2+z^2-p^2}{2yz},$$
$$\text{és}\quad \cos\gamma = \frac{x^2+z^2-q^2}{2xz}.$$

Mivel a négyszög konvex, azért α és β $180°$-nál kisebb, és ezért $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ miatt

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{4x^2y^2-\left(x^2+y^2-r^2\right)^2}{4x^2y^2}} = \frac{\sqrt{4x^2y^2-\left(x^2+y^2-r^2\right)^2}}{2xy}$$

és

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{4y^2z^2-\left(y^2+z^2-p^2\right)^2}}{2yz}.$$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, ezért $\gamma=\alpha+\beta$ miatt

$$\frac{x^2+z^2-q^2}{2xz} = \cos\gamma =$$
$$= \left(\frac{x^2+y^2-r^2}{2xy}\right)\left(\frac{y^2+z^2-p^2}{2yz}\right) - \frac{\sqrt{4x^2y^2-\left(x^2+y^2-r^2\right)^2}}{2xy}\cdot\frac{\sqrt{4y^2z^2-\left(y^2+z^2-p^2\right)^2}}{2yz} =$$
$$= \frac{\left(x^2+y^2-r^2\right)\left(y^2+z^2-p^2\right)-\sqrt{\left(4x^2y^2-\left(x^2+y^2-r^2\right)^2\right)\left(4y^2z^2-\left(y^2+z^2-p^2\right)^2\right)}}{4xy^2z},$$

ezért

$$2y^2\left(x^2+z^2-q^2\right) =$$
$$= \left(x^2+y^2-r^2\right)\left(y^2+z^2-p^2\right)-\sqrt{\left(4x^2y^2-\left(x^2+y^2-r^2\right)^2\right)\left(4y^2z^2-\left(y^2+z^2-p^2\right)^2\right)}.$$

Ismert, hogy egy páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul, ezért $y^2\equiv 1 \pmod 8$, $x^2+z^2-q^2\equiv 1+1-1=1 \pmod 8$, így $y^2\left(x^2+z^2-q^2\right)\equiv 1 \pmod 8$. Akkor pedig $2y^2\left(x^2+z^2-q^2\right)\equiv 2 \pmod{16}$.

Tehát az egyenlet bal oldalán olyan egész szám áll, amelynek maradéka 16-tal osztva 2. Akkor ez igaz lesz a jobb oldalon álló kifejezésre is. $x^2+y^2-r^2\equiv 1 \pmod 8$, és $y^2+z^2-p^2\equiv 1 \pmod 8$, ezért $\left(x^2+y^2-r^2\right)\left(x^2+z^2-p^2\right)\equiv 1 \pmod 8$, és így $\left(x^2+y^2-r^2\right)\left(y^2+z^2-p^2\right)$ maradéka 16-tal osztva 1 vagy $9(=8+1)$ lehet. Így a jobb oldalon csak akkor állhat 16-tal osztva 2 maradékot adó szám, ha

$$\sqrt{\left(4x^2y^2-\left(x^2+y^2-r^2\right)^2\right)\left(4y^2z^2-\left(y^2+z^2-p^2\right)^2\right)}$$

maradéka 16-tal osztva -1 vagy 7. Akkor pedig

$$\left(4x^2y^2-\left(x^2+y^2-r^2\right)^2\right)\left(4x^2z^2-\left(y^2+z^2-p^2\right)^2\right)$$

16-tal osztva biztosan 1-et ad maradékul. ($(-1)^2\equiv 7^2\equiv 1 \pmod{16}$.)

$x^2y^2\equiv 1 \pmod 8$, ezért $4x^2y^2\equiv 4 \pmod{32}$, és így $4x^2y^2\equiv 4 \pmod{16}$.

$x^2+y^2-r^2\equiv 1 \pmod 8$, ezért $x^2+y^2-r^2$ $8k+1$ alakú, és akkor $\left(x^2+y^2-r^2\right)\cdot(8k+1)^2=64k^2+16k+1$ alakú lesz. Tehát $\left(x^2+y^2-r^2\right)^2$ maradéka 16-tal osztva 1.

Így $4x^2y^2-\left(x^2+y^2-r^2\right)\equiv 4-1=3 \pmod{16}$.

Hasonlóan $4y^2z^2-\left(y^2+z^2-p^2\right)^2\equiv 3 \pmod{16}$, így

$$\left(4x^2y^2-\left(x^2+y^2-r^2\right)^2\right)\left(4y^2+z^2-\left(y^2+z^2-p^2\right)^2\right)\equiv 3\cdot 3=9 \pmod{16}.$$

De az előbb már beláttuk, hogy ennek a kifejezésnek 16-tal osztva a maradéka 1, ez ellentmondás, tehát feltevésünk helytelen volt.

Ugyanígy ellentmondásra jutunk abban az esetben is, ha a pontok konvex burka háromszög. Ha a négy pontot a *2. ábra* szerint A, B, C, D-vel jelöljük, akkor az előbbi gondolatmenet elvégezhető az $ABD\sphericalangle$, $DBC\sphericalangle$, $ABC\sphericalangle$ szögekre, és úgyanúgy ellentmondáshoz jutunk.

Ez azt jelenti, hogy nem létezik a síkon négy pont úgy, hogy bármely kettő távolsága páratlan egész szám legyen.

Valkó Benedek (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.)