

Az elektron pontosan akkor kerül először csak az 1995-ik lépésben az áramköri lap alsó oldalára, ha az első 1994 lépéssel a Q vagy az S chip-be jut el anélkül, hogy a QS vezetéken áthaladna, majd az 1995-ik lépésben teszi meg a QS utat. Ha tehát rendre p_i, q_i, r_i, s_i jelöli annak a valószínűségét, hogy az elektron az első i lépésben a QS út elkerülésével a P, Q, R, S chip-be jut el, akkor a feladatban keresett valószínűséget $(q_{1994} + s_{1994})/3$ adja meg. Nyilván

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 0, \quad r_0 = 0, \quad s_0 = 0,$$

továbbá a feltételes valószínűség tétele szerint

$$p_{i+1} = \frac{q_i + r_i + s_i}{3}, \quad q_{i+1} = \frac{p_i + r_i}{3}, \quad r_{i+1} = \frac{p_i + q_i + s_i}{3}, \quad s_{i+1} = \frac{p_i + r_i}{3}.$$

Célszerű bevezetni az $a_i = p_i + r_i, b_i = q_i + s_i$ jelöléseket, ezekkel ugyanis a keresett valószínűség $b_{1994}/3$, továbbá a fentiekből

$$a_0 = 1 \quad \text{és} \quad b_0 = 0, \quad \text{illetve} \quad a_{i+1} = \frac{a_i + 2b_i}{3} \quad \text{és} \quad b_{i+1} = \frac{2a_i}{3}.$$

Innen a_i -re az $a_{i+1} = \frac{1}{3}a_i + \frac{4}{9}a_{i-1}$ lineáris rekurzió adódik az $a_0 = 1$ és $a_1 = \frac{1}{3}$ kezdőértékkel. Az a_i -t keressük $c_1x_1^i + c_2x_2^i$ alakban alkalmas c_1 és c_2 konstansokkal és az $x^2 = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$ egyenlet x_1, x_2 gyökeivel, hiszen minden ilyen alakú sorozat kielégíti a rekurzió egyenletét. A kezdőértékekből a konstansokra egy lineáris egyenletrendszer adódik, amely egyértelműen megoldható; végeredményben azt kapjuk, hogy

$$a_i = \frac{3}{\sqrt{17}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{6} \right)^{i+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{6} \right)^{i+1} \right].$$

Így a feladatban kért valószínűség

$$P = \frac{b_{1994}}{3} = \frac{2a_{1993}}{9} = \frac{2}{3\sqrt{17}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{6} \right)^{1994} - \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{6} \right)^{1994} \right] = 2,42 \dots 10^{-138}.$$

Makai Márton (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján