Meg fogjuk mutatni, hogy létezik egy olyan A_0, A_1, ..., A_n pontsorozat, amelynek első és utolsó eleme az origó, és a bolha mindegyik A_i-ből tud ugrani A_{i+1}-be. Bebizonyítjuk, hogy ez elégséges ahhoz, hogy a bolhát el tudjuk pusztítani.

Az A_i pontból a u_1, u_2, u_3 vektorok három különböző pontba mutatnak, ezek közül az egyik az A_{i+1} pont. A másik két pontot jelöljük B_i-vel és C_i-vel.

Az első n lépésben mérgezzük meg sorban a B_0 és C_0, B_1 és C_1, ..., B_{n-1} és C_{n-1} pontokat. Az **F. 3048.** feladat megoldásában leírtakhoz hasonlóan igazolható, hogy k perc eltelte után $(0 \le k \le n)$ a bolha vagy már elpusztult, vagy az $A_0, \ldots, A_k$ pontok valamelyikén tartózkodik.

Az n-edik perc letelte után a bolha (ha még él) már csak az $A_0 \to A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_{n-1} \to A_0$ körpályán ugrálhat, mert mind megmérgeztük a $B_0, \ldots, B_{n-1}, C_0, \ldots, C_{n-1}$ pontokat. A körpálya pontjait sorban megmérgezve biztosan elpusztíthatjuk a bolhát.

A megfelelő $A_0, \ldots, A_n$ pontok létezése azzal ekvivalens, hogy létezzenek olyan a_1, a_2, a_3 nemnegatív egész számok, amelyek nem mind 0-k, és teljesül rájuk, hogy

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0. \tag{1}$$

Bebizonyítjuk, hogy ha az u_1, u_2, u_3 vektorok nincsenek egy félsíkban, akkor léteznek ilyen számok. Először azt mutatjuk meg, hogy ha (1) teljesül valamilyen valós együtthatókkal (feltéve, hogy van köztük 0-tól különböző), akkor az együtthatók közül egyik sem lehet 0, és az együtthatók azonos előjelűek. Ha valamelyik együttható 0 lenne, akkor a másik két vektor konstansszorosa lenne egymásnak, és a három vektor egy félsíkba esne. Az együtthatók tehát 0-tól különböznek.

A három együttható között biztosan van két azonos előjelű; a szimmetria miatt feltehetjük, hogy ez a két szám a_1 és a_2. Ha a_3 előjele ezekkel ellentétes, akkor u_3 felírható u_1 és u_2 olyan lineáris kombinációjaként, amelyben az együtthatók pozitívak:

$$u_3 = \frac{-a_1}{a_3}u_1 + \frac{-a_2}{a_3}u_2.$$

Ebből viszont következik, hogy u_3 benne van abban a szögtartományban, amelyet u_1 és u_2 zár be, a három vektor ismét egy félsíkba esik, ami ellentmondás. Az a_1, a_2, a_3 együtthatók tehát csak azonos előjelűek lehetnek.

Legyenek az u_i vektor koordinátái x_i és y_i. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(x_2y_3 - x_3y_2)u_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)u_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)u_3 = 0.$$

Ebben az azonosságban az együtthatók egész számok, amelyek csak akkor lehetnének 0-k, ha a megfelelő két vektor párhuzamos lenne. Az előbb látottak alapján vagy mindhárom szám pozitív, vagy mindhárom negatív. Az előbbi esetben ezeket az együtthatókat, az utóbbi esetben az ellentettjeiket választhatjuk a_1, a_2, a_3-nak. Ezzel bebizonyítottuk, hogy léteznek megfelelő A_0, A_1, ..., A_n pontok, következésképpen a bolha elpusztítható.

Zubcsek Péter Pál (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján