

Írányítsunk minden egyes szakaszt mindkét lehetséges módon, és fűzzük össze az így keletkező  $2n$  db vektort irányszögük szerint növekvő (nem csökkenő) sorrendben. A vektorok között mindegyik az ellentettjével együtt szerepel, ezért az összefűzés során egy középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög keletkezik, amelynek kerülete a szakaszok összhosszának kétszerese, azaz  $2$ . A sokszög középpontjából állítsunk merőlegest a hozzá (egyik) legközelebbi oldal-egyenesre és annak tükörképére, továbbá jelöljük  $d$ -vel a két merőleges alkotta szakaszt, illetve annak hosszát. Ekkor a sokszög vetülete a  $d$  egyenesére éppen a  $d$ , amely az eredetileg adott szakaszok vetületeinek egymáshoz csatlakozó eltolt példányaiból tevődik össze. Ezek szerint az egyenesen a vetületek összhossza  $d$ . Másrészről a  $d$  származtatása miatt a köré mint átmérő köré rajzolt kör a sokszögtartománynak része, tehát a kerülete kisebb a sokszögénél. Így  $d\pi < 2$ , azaz  $d < 2/\pi$ , ami igazolja a feladat állítását.

**II. megoldás.** Legyenek a szakaszok  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), és jelölje  $e(\alpha)$  egy rögzített egyenesnek egy rögzített pont körüli, pozitív irányú,  $\alpha$  szögű elforgatottját. Válasszuk meg a  $\delta_i$  szögeket úgy, hogy  $e(\delta_i)$  párhuzamos legyen  $a_i$ -vel. Ekkor az  $a_i$  szakasz  $e(\alpha)$  egyenesre való vetületének hossza  $f_i(\alpha) = a_i |\cos(\alpha - \delta_i)|$ , a vetületek összhosszát pedig  $f = \sum_{i=1}^n f_i$  adja meg. Az  $f$  integrálátlaga a  $[0, \pi]$  intervallumon

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_0^{\pi} f_i = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n a_i \int_0^{\pi} |\cos(\alpha - \delta_i)| d\alpha = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n a_i \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{2}{\pi}.$$

Jegyezzük meg, hogy az  $f_i$ -k folytonosak és szakaszonként szigorúan konkávak, tehát ugyanez érvényes  $f$ -re is, speciálisan,  $f$  nem konstans. Ezt az előző egyenlőséggel egybevetve

$$\min_{[0, \pi]} f < \frac{2}{\pi} < \max_{[0, \pi]} f.$$

Ezzel beláttuk, hogy létezik olyan egyenes, amelyen a szakaszok vetületének összhossza kisebb  $2/\pi$ -nél, és hogy olyan is van, amelyen ez az összhossz  $2/\pi$ -nél nagyobb.

*Pap Gyula* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o.t.)

*Megjegyzés.* A második megoldásból – ismét csak  $f$  folytonosságát használva – az is kiolvasható, hogy létezik olyan egyenes, amelyen a vetületek összhossza éppen  $2/\pi$ , tehát hogy van olyan  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , amelyre  $f(\alpha) = 2/\pi$ . *Gyarmati Katalin* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) megjegyezte, hogy csak véges sok ilyen  $\alpha$  létezhet.