Megoldás. 1. Először azt látjuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén lehet találni egy n különböző elemből álló számtani sorozatot, aminek minden eleme egy pozitív egésznek 1-nél nagyobb egész kitevőjű hatványa. Ezt teljes indukcióval igazoljuk.

$n=2$-re az állítás triviális, vegyük például $2^2=4$-et és $3^2=9$-et.

Tegyük fel, hogy k-ra igaz az állítás, tehát meg tudunk adni $a_1<a_2<\dots<a_k$ pozitív egészeket úgy, hogy

$$a_i=a_1+(i-1)d, \qquad a_i=b_i^{c_i} \qquad\qquad (1\le i\le k;\ b_i,\ c_i,\ d \text{ pozitív egész};\ c_i\ge 2).$$

Legyen $a_{k+1}=a_1+kd$, így a_1, a_2, $\dots$, a_{k+1} is számtani sorozat lesz, de a_{k+1} általában nem teljes hatvány.

Legyen $C=c_1c_2\dots c_k$, és legyen $A_j=a_j\cdot a_{k+1}^C$ (ahol $1\le j\le k+1$). Ekkor $A_j=a_1a_{k+1}^C+(j-1)da_{k+1}^C$, tehát A_1, $\dots$, A_{k+1} szintén számtani sorozatot alkot.

$A_{k+1}=a_{k+1}\cdot a_{k+1}^C=a_{k+1}^{C+1}$, és minden $1\le i\le k$-ra $A_i=b_i^{c_i}a_{k+1}^C=(b_ia_{k+1}^{C/c_i})^{c_i}$; ezért minden A_j egy pozitív egész 1-nél nagyobb egész kitevőjű hatványa.

2. Egy ilyen számtani sorozat nem lehet végtelen hosszú. Tegyük fel, hogy mégis van egy végtelen $ak+b$ számtani sorozat, amelynek minden eleme teljes hatvány. Legyen c az a és b legnagyobb közös osztója és $a_0c=a$, $b_0c=b$. Ekkor a $c(a_0k+b_0)$ számtani sorozatról van szó, ahol $(a_0,b_0)=1$. Dirichlet tétele alapján a_0k+b_0 számtani sorozat elemei között végtelen sok prím van. Ha $a_0k+b_0=p$ prím, akkor cp-nek teljes hatványnak kell lennie; ez viszont csak akkor lehetséges, ha $p\mid c$. Mivel végtelen sok k-ra lesz a_0k+b_0 prím, azért c-nek végtelen sok prímmel kell oszthatónak lennie. Ez csak $c=0$ esetén következik be, ami ellentmondás, mert $(a,b)\ne 0$.

Pap Gyula (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o.t.)