A feladatot vektorok segítségével oldjuk meg. Jelöljük az $A_1B_1C_1$ háromszög súlypontját O-val, az $\overrightarrow{OA_1}$ vektort $\mathbf{a}$-val, az $\overrightarrow{OA_2}$ vektort pedig $\mathbf{b}$-vel. Tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor esetén jelölje $\mathbf{v}'$ a $\mathbf{v}$ vektor $+120^\circ$-os elforgatásával kapott vektort. Mivel az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ is O középpontú szabályos háromszögek, ezért

$$\overrightarrow{OB_1} = \mathbf{a}', \quad \overrightarrow{OC_1} = (\mathbf{a}')' = \mathbf{a}'', \quad \overrightarrow{OB_2} = \mathbf{b}' \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OC_2} = \mathbf{b}''.$$

A 120°-os forgatás tulajdonságaiból következik, hogy

(i) minden $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektor, valamint λ valós szám esetén: $(\mathbf{v}+\lambda\mathbf{w})' = \mathbf{v}' + \lambda\mathbf{w}'$;

(ii) egy DEF háromszög pontosan akkor szabályos és pozitív körüljárású, ha $(\overrightarrow{DE})' = \overrightarrow{EF}$;

(iii) minden $\mathbf{v}$ vektor esetén $\mathbf{v}+\mathbf{v}'+\mathbf{v}'' = 0$.

Ezen állításokat az olvasó – az 1–3. ábrák segítségével – könnyen beláthatja.

Legyen P az a pont, amelyre az A_1A_2P háromszög szabályos és pozitív körüljárású. Megmutatjuk, hogy ekkor a PB_2C_1 háromszög is ilyen.

(ii) alapján a P pont definíciójából következik, hogy $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2P} = \mathbf{b} + (\overrightarrow{A_1A_2})' = \mathbf{b} + (\mathbf{b}-\mathbf{a})'$. Vagyis (i)-t felhasználva: $\overrightarrow{OP} = \mathbf{b} + \mathbf{b}' - \mathbf{a}'$. Állításunk igazolásához elegendő belátnunk, hogy $(\overrightarrow{C_1P})' = \overrightarrow{PB_2}$. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{C_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC_1} = (\mathbf{b}+\mathbf{b}'-\mathbf{a}') - \mathbf{a}''$, és $\overrightarrow{PB_2} = \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OP} = \mathbf{b}' - (\mathbf{b}+\mathbf{b}'-\mathbf{a}')$, tehát elegendő megmutatnunk, hogy

$$\mathbf{b}' + \mathbf{b}'' - \mathbf{a}'' - \mathbf{a}''' = -\mathbf{b} + \mathbf{a}',$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$\mathbf{b} + \mathbf{b}' + \mathbf{b}'' = (\mathbf{a} + \mathbf{a}' + \mathbf{a}'')'.$$

Ez viszont igaz, mert (iii) szerint mindkét oldalon a $\mathbf{0}$ áll.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. A megoldás során nem használtuk ki, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszöget a súlypontja körül hány fokkal forgattuk el és milyen arányban nagyítottuk. Feladatunk állítása tetszőleges szögű elforgatás és tetszőleges arányú nagyítás esetén is igaz.

Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján.