

Helyettesítsük a függvényegyenletbe az  $x = 0$ ,  $y = \sqrt{t}$  értékeket (ahol  $t \geq 0$  valós szám):

$$f(t) = f(0)^2 + t^2.$$

A továbbiakban csak nemnegatív  $x$ -eket tekintünk. Ekkor az előző összefüggés szerint  $f(x) = x + f(0)^2$ , valamint  $f((x - y)^2) = (x - y)^2 + f(0)^2$ . Ezeket beírva a függvényegyenletbe:

$$(x - y)^2 + f(0)^2 = (x + f(0)^2)^2 - 2x \cdot f(y) + y^2, x^2 - 2xy + y^2 + f(0)^2 = x^2 + f(0)^4 + 2xf(0)^2 - 2xf(y) + y^2, 2x \cdot (f(y) - y - f(0)^2) = 0$$

A kapott egyenlőség jobb oldala egy  $x$ -től és  $y$ -től független állandó. Ha a bal oldalon  $y$ -t tetszőleges valós számként rögzítjük, akkor az  $x$  együtthatója is konstans lesz. Mivel  $x$  tetszőleges nemnegatív értéket felvehet, ez csak úgy lehetséges, hogy  $x$  együtthatója minden  $y \in \mathbf{R}$  esetén nulla, valamint ekkor szükségképpen a jobb oldal is az:

$$f(y) = y + f(0)^2, \quad f(0)^4 - f(0)^2 = 0.$$

A második egyenletből  $f(0)^2 = 0$  vagy 1 adódik, tehát a lehetséges  $f$  függvények az  $f_1(y) = y$  és az  $f_2(y) = y + 1$ . Ezek jók is, mint azt a következő számolás mutatja:

$$f_1((x - y)^2) = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = f_1(x)^2 - 2xf_1(y) + y^2,$$

és

$$\begin{aligned} f_2((x - y)^2) &= (x - y)^2 + 1 = x^2 - 2xy + y^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 - 2xy - 2x + y^2 = \\ &= (x + 1)^2 - 2x(y + 1) + y^2 = f_2(x)^2 - 2xf_2(y) + y^2. \end{aligned}$$