

Jelöljük az  $ABCD$  konvex négyszög szögeit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ -val. Először megmutatjuk, hogy a négyszögnek van olyan oldala, amelynek relatív hossza legalább 1. Tudjuk, hogy  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ . Ezért a négyszögnek van két szomszédos szöge, amelyek összege legfeljebb  $180^\circ$ . (Ha ez nem lenne igaz, akkor  $\alpha + \beta > 180^\circ$ ,  $\beta + \gamma > 180^\circ$ ,  $\gamma + \delta > 180^\circ$  és  $\delta + \alpha > 180^\circ$  lenne, amiből  $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 360^\circ$  következne.) Feltehetjük, hogy  $\alpha + \beta \leq 180^\circ$ . Legyen  $e$  a  $B$ -n átmenő,  $AD$ -vel párhuzamos egyenes (1. ábra). Mivel  $ABCD$  konvex és  $\alpha + \beta \leq 180^\circ$ , azért a négyszög teljes egészében benne van az  $AD$  és  $e$  párhuzamos egyenesek által határolt sávban. Ezért a négyszög minden  $AB$ -vel párhuzamos húrja is benne van a sávban, vagyis minden  $AB$ -vel párhuzamos húr legfeljebb olyan hosszú, mint  $AB$ . Tehát  $AB$  relatív hossza legalább 1.

Most megmutatjuk, hogy a négyszögnek olyan oldala is van, amelynek relatív hossza legalább 1. A négyszögnek van két szomszédos szöge, amelyek összege legalább  $180^\circ$  (ez ugyanúgy bizonyítható, mint az előző esetben a másik irányú egyenlőtlenség). Feltehetjük, hogy  $\gamma + \delta > 180^\circ$ . Legyen  $EF$  a  $CD$ -vel párhuzamos olyan húr, amelynek egyik végpontja az  $AD$ , másik pedig a  $BC$  szakasz belső pontja. (Ilyen húr mindig létezik.) Ekkor a  $C$ -n átmenő,  $AD$ -vel párhuzamos  $f$  egyenes az  $EF$  szakaszt egy  $G$  pontban metszi (2. ábra), ahol  $G$  vagy belső pontja a szakasznak – ha  $\gamma + \delta > 180^\circ$  –, vagy  $G \equiv F$  – ha  $\gamma + \delta = 180^\circ$ . A  $CDEG$  négyszög paralelogramma, tehát  $CD = EG$ , vagyis  $CD \leq EF$ , amiből következik, hogy  $CD$  relatív hossza legfeljebb 1.

*Megjegyzés.* Ha a sokszög oldalait is a sokszög húrjainak tekintjük – feladatunk szövege alapján ezt megtehetjük –, akkor nyilvánvaló, hogy egy oldal relatív hossza nem lehet 1-nél kisebb. Ha maga az oldal a leghosszabb párhuzamos húr, akkor a relatív hossz 1. Ezért feladatunkat úgy is megoldhatjuk, hogy – a megoldás első részével megegyező módon – megmutatjuk egy olyan oldal létezését, amelynek relatív hossza éppen 1.

