

Az egyenlethez 1-et adva, a jobb oldal szorzattá alakítható:

$$n^2 + 1 = (p^2 + 1)(q^2 + 1).$$

Ha  $p$  és  $q$  mindegyike páratlan, akkor ez a szorzat osztható négyvel, így  $n^2 = 4k - 1$ . Azonban egy négyzetszám négyvel osztva csak nulla vagy egy maradékot adhat, ezért  $p$  és  $q$  közül legalább az egyik páros, s mivel prím is, ezért szükségképpen kettővel egyenlő. Minthogy  $p$  és  $q$  szerepe felcserélhető, ezért feltehetjük, hogy  $p = 2$ .

Ekkor az egyenlet így alakul:  $n^2 = 4 + 5q^2$ , azaz  $(n - 2)(n + 2) = 5q^2$ . A jobb oldal felbontásai csak  $(1, 5q^2)$ ,  $(q, 5q)$  és  $(q^2, 5)$  lehetnek, mivel  $q$  prím és  $n$  pedig természetes szám. Ezen párok nagyobbik elemének  $n + 2$ -vel, míg a másiknak  $n - 2$ -vel kell megegyeznie, azaz különbségük 4:

$$5q^2 - 1 = 4, \quad \text{vagy} \quad 5q - q = 4, \quad \text{vagy} \quad q^2 - 5 = \pm 4.$$

Az elsőből  $q^2 = 1$ , ez nem prím; a másodikból  $q = 1$ , szintén nem prím; a harmadikból  $q^2 = 9$  vagy 1 adódik, aminek prím megoldása egyedül a  $q = 3$ . Ezt visszahelyettesítve:

$$p^2 + q^2 + p^2q^2 = 4 + 9 + 4 \cdot 9 = 49 = 7^2,$$

vagyis ebben az esetben a  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $n = 7$  az egyedüli megoldás. Ehhez hozzávéve a  $p$  és  $q$  felcserélésével nyert  $p = 3$ ,  $q = 2$ ,  $n = 7$  számhármast, megkapjuk az egyenlet összes megoldását.

*Lengyel Tímea* (Kaposvár, Munkácsy M. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján