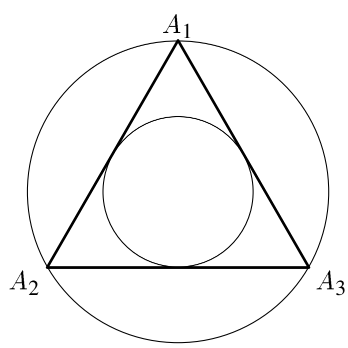
Ha egy szabályos háromszög csúcsai a nagyobbik körön vannak, akkor beírt köre éppen a kisebbik kör (*1. ábra*). Az ilyen tulajdonságú szabályos háromszögek területe $3\sqrt{3}$ területegység. Megmutatjuk, hogy ha az $A_1A_2 \dots A_n$ sokszög tartalmazza a kisebbik kört, csúcsai pedig a nagyobbik körön vannak, akkor a területe legalább $3\sqrt{3}$.

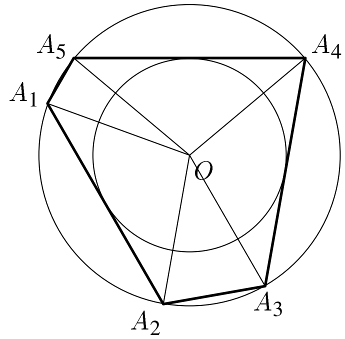
$|A_1A_2| = |A'_1A'_2|$; $|A_3A_4| = |A'_2A'_3|$; $|A_4A_5| = |A'_3A'_4|$; $|A_2A_3| = |A'_4A'_5|$; $|A_5A_1| = |A'_5A'_1|$ 2. ábra

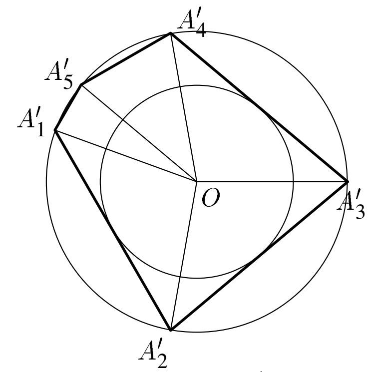
Tekintsünk most két tetszőleges sugarú koncentrikus kört, és legyen a nagyobbikba írt sokszög, amelyik tartalmazza a kisebb kört, $A_1A_2 \dots A_n$. Jelöljük a körök középpontját O-val. A sokszög területe megegyezik az A_iOA_{i+1} ($i = 1, 2, \dots\ n$; $A_{n+1} = A_1$) háromszögek területeinek összegével. Ez a területösszeg nyilván nem változik, ha a háromszögek sorrendjét megváltoztatjuk. Rakjuk egymás mellé azokat a háromszögeket, amelyek A_iA_{i+1} oldala érinti a kisebbik kört, majd ezután változtassuk meg a csúcsok betűzését úgy, hogy az $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, $\dots$, $A'_kA'_{k+1}$ oldalak legyenek azok, amelyek érintik a kisebbik kört; az A'_{k+1}, A'_{k+2}, $\dots$, A'_n, A'_1 oldalak pedig azok, amelyek nem érintik (a *2. ábrán* ezt láthatjuk ötszög esetén). Az így kapott $A'_1A'_2 \dots A'_n$ sokszög területe megegyezik az eredeti $A_1A_2 \dots A_n$ sokszög területével. Vizsgáljuk most az $A'_{k+1}A'_{k+2}$, $A'_{k+1}A'_{k+3}$, $\dots$, $A'_{k+1}A'_n$, $A'_{k+1}A'_1$ egyeneseket. Legyen ezek közül – ilyen sorrendben – $A'_{k+1}A'_{m+1}$ az első olyan, amelyik metszi a kisebbik kört. Ekkor az A'_{k+1}-ből a kisebbik körhöz húzott $A'_kA'_{k+1}$-tól különböző érintőnek a nagy körrel való A'_{k+1}-től különböző metszéspontját jelöljük B_1-gyel (*3. ábra*). Az $A'_{k+1}A'_{m+1}B_1$ háromszög területe kisebb, mint az $A'_{k+1}A'_{m+1}A'_m$ háromszög területe, mert B_1 közelebb van az $A'_{k+1}A'_{m+1}$ egyeneshez, mint A'_m (ugyanis $A'_{k+1}A'_m$ és $A'_mA'_{m+1}$ nem metszhetik a kis kört). Tehát az $A'_1A'_2 \dots A'_{k+1}B_1A'_{m+1}A'_{m+2} \dots A'_n$ sokszög területe kisebb, mint az $A'_1A'_2 \dots A'_n$ sokszög területe. Ezután ismételjük meg ezt a „levágási" eljárást úgy, hogy A'_{k+1} szerepét B_1 veszi át. Véges sok vágás után – az új pontokat rendre B_2, B_3, $\dots$, B_i-vel jelölve – elérjük, hogy a $B_iA'_1$ egyenes még nem metszi (esetleg érinti), a $B_iA'_2$ egyenes viszont metszi a kis kört. A kapott $A'_1A'_2 \dots A'_{k+1}B_1B_2 \dots B_i$ sokszög az egybevágóság erejéig egyértelmű, ezért az eljárásból következően ez a legkisebb területű azon sokszögek közül, melyek tartalmazzák a kis kört, csúcsaik pedig a nagy körön vannak. Ezt a sokszöget azzal jellemezhetjük, hogy – legfeljebb egy oldala ($B_iA'_1$) kivételével – mindegyik oldala érinti a kis kört (*4. ábra*). Ez a tulajdonság a két kör sugarának arányától függetlenül mindig igaz a minimális területű sokszögre.

Visszatérve eredeti feladatunkra, ha a két kör sugara 1, illetve 2, akkor éppen a nagy körbe írható szabályos háromszöget kapjuk, mint a követelményeket kielégítő, minimális területű sokszöget. Ha $A_1A_2A_3$ egy a nagy körbe írt szabályos háromszög, A_4 pedig a rövidebbik A_3A_1 ív egy A_1-hez „közel" lévő pontja, akkor az $A_1A_2A_3A_4$ húrnégyszög (*5. ábra*) területe nagyobb, mint az $A_1A_2A_3$ háromszög területe, de tetszőlegesen megközelítheti azt. Tehát a nagyobbik körbe írt és a kisebbik kört tartalmazó húrnégyszögek területe nagyobb mint $3\sqrt{3}$, de tetszőlegesen megközelítheti ezt az értéket.

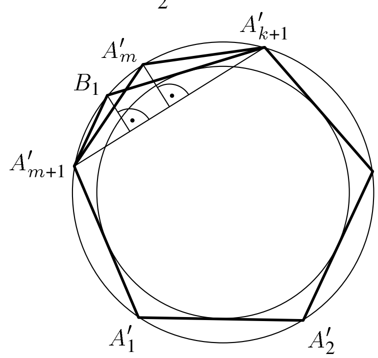
Megjegyzés. Az 1 pontot kapott versenyzők nem adtak megfelelő indoklást a $3\sqrt{3}$-as határértékre, a 0 pontosak helytelen következtetésre jutottak.



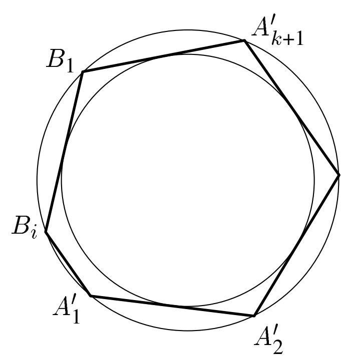




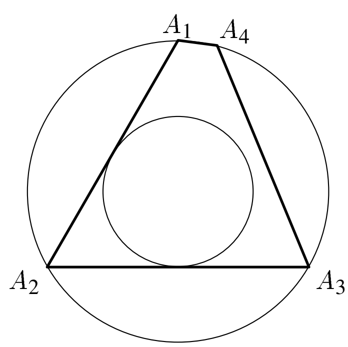
A'_4
A'_5
A'_1
O
A'_3
A'_2



A'_{k+1}
A'_m
B_1
A'_{m+1}
A'_1
A'_2



A'_{k+1}
B_1
B_i
A'_1
A'_2



A_1
A_4
A_2
A_3