I. megoldás. Ismert, hogy egy háromszög pontosan akkor hegyesszögű, ha (egyik) legnagyobb oldalának négyzete kisebb, mint a másik két oldal négyzetének összege. Ha $c^3 = a^3 + b^3$, akkor c a háromszög legnagyobb oldala. Megmutatjuk, hogy $c^2 < a^2 + b^2$.

A $c^3 = a^3 + b^3$ egyenlőség mindkét oldalát c-vel osztva, majd felhasználva, hogy $c > a$ és $c > b$:

$$c^2 = \frac{c^3}{c} = \frac{a^3 + b^3}{c} < \frac{a^3}{a} + \frac{b^3}{b} = a^2 + b^2.$$

Tehát a háromszög hegyesszögű.

Szalai-Dobos András (Szekszárd, Garay J. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A $c^2 < a^2 + b^2$ egyenlőtlenséget bizonyítjuk másképpen. A feltételből következik, hogy $c^2 = \sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}$. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy

$$\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2} < a^2 + b^2,$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$\left(a^3 + b^3\right)^2 < \left(a^2 + b^2\right)^3.$$

A hatványozást elvégezve és rendezve az egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$0 < 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - 2a^3b^3.$$

Ez az egyenlőtlenség viszont nyilvánvalóan teljesül, mert

$$3a^4b^2 + 3a^2b^4 - 2a^3b^3 = a^2b^2\left(3a^2 + 3b^2 - 2ab\right) = a^2b^2\left((a-b)^2 + 2a^2 + 2b^2\right).$$

Tehát a háromszög hegyesszögű.

Megjegyzés. Ha $n > 2$ természetes szám, és az a, b, c oldalú háromszögre teljesül, hogy $a^n + b^n = c^n$, akkor a háromszög hegyesszögű. Ez legegyszerűbben az I. megoldásban szereplő módszerrel látható be:

$$c^2 = \frac{c^n}{c^{n-2}} = \frac{a^n + b^n}{c^{n-2}} = a^2\left(\frac{a}{c}\right)^{n-2} + b^2\left(\frac{b}{c}\right)^{n-2} < a^2 + b^2.$$

Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o.t.)