Megjegyzés. A megoldás során szomszédosnak olyan mezőket nevezünk, amelyek élben vagy csúcsban csatlakoztak egymáshoz. Amennyiben csak az élben csatlakozást tekintenénk, a feladat triviálisan megoldható lenne (pl. egy-egy sorba minden második helyre csupa sötét, ill. csupa világos figurát téve). Akik így oldották meg a feladatot, nem kaptak pontot.

Megoldás. A közölt megoldásban a következő, általánosabb állítást fogjuk igazolni: ha $n > 2$, $n \neq 4k+2$, akkor az $n \times n$-es sakktáblára fel lehet állítani $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ bábut úgy, hogy ezeknek a fele sötét, a fele világos, és minden figurának ugyanannyi világos szomszédja van, mint sötét, míg $n = 4k+2$-re $\left[\frac{n^2}{2}\right] + 2$ számút, illetve erre mutatunk egy $\left[\frac{n^2}{2}\right] - 2$-es elhelyezést is.

Először igazoljuk azt, hogy $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ mindig páros: ha $n = 2k$, akkor $\left[\frac{n^2}{2}\right] = 2k^2$, míg $n = 2k+1$ esetén $\left[\frac{n^2}{2}\right] = \left[\frac{4k^2+4k+1}{2}\right] = 2k^2 + 2k$, mindkét esetben páros az eredmény. Ezek után megadunk egy-egy elhelyezési módot az $n = 3, 4, 5, 6$ esetekre (*1. ábra*):

Ha $n > 6$, akkor az $n \times n$-es problémát visszavezetjük egy $(n-4) \times (n-4)$-es elhelyezésre. A széleken levő mezőkre (a sarkok kivételével) felváltva két sötét és két világos bábut teszünk (akárcsak az *1. ábra* 2. és 5. tábláján): ez lehetséges, hiszen összesen $4(n-2)$ helyünk van. A következő „egy szélességű keretbe” nem teszünk bábut, majd a fennmaradó $(n-4) \times (n-4)$-es táblára elhelyezünk $\left[\frac{(n-4)^2}{2}\right]$, illetve $\left[\frac{(n-4)^2}{2}\right] \pm 2$ bábut. Amennyiben $n - 4 > 6$, akkor ismét egy kettő szélességű keretet töltünk be, és utána az $(n-8) \times (n-8)$-as tábla elrendezését használjuk. Nyilvánvaló, hogy a bábuk elhelyezése így megfelelő.

Egyetlen dolog szorul már csak bizonyításra: az, hogy az $n \times n$-es táblára valóban annyi bábut tettünk, mint amennyit kellett. Ehhez azt szükséges megmutatni, hogy

$$\left[\frac{n^2}{2}\right] = \left[\frac{(n-4)^2}{2}\right] + 4(n-2)$$

fennáll. Az $n = 2k$ esetben:

$$\left[\frac{(2k-4)^2}{2}\right] + 4(2k-2) = 2(k-2)^2 + 4(2k-2) = 2k^2 - 8k + 8 + 8k - 8 = 2k^2 = \left[\frac{(2k)^2}{2}\right],$$

míg az $n = 2k+1$ esetben:

$$\left[\frac{(2k-3)^2}{2}\right] + 4(2k-1) = 2k^2 - 6k + 4 + 4(2k-1) = 2k^2 + 2k = \left[\frac{(2k+1)^2}{2}\right].$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

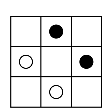
A teljesség kedvéért a dolgozatokból lássunk néhány konkrét elhelyezést az $n = 8$ esetben (*2. ábra*):

(Aki legalább egy jó elhelyezést mutatott, megkapta az 5 pontot.)

A 2. ábra legutolsó rajzának kis módosításával látható, hogy még 34 bábu is elhelyezhető. (Esetleg több is?) Egyébként a kitűzéssel egyidőben megjelent „Királyok körei” című cikkből kiderül, hogy nem adható meg olyan megoldás, ahol a bábuk egyetlen zárt láncot alkotnak.

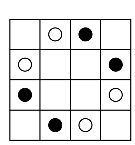
Szita István (Körmend, Kölcsey F. Gimn., III. o.t.) *Nyakas Péter* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., III. o.t.)

dolgozata alapján



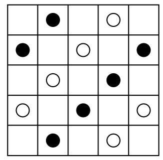
$n = 3$

$\left[\frac{n^2}{2}\right] = 4$



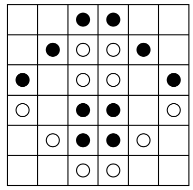
$n = 4$

$\left[\frac{n^2}{2}\right] = 8$



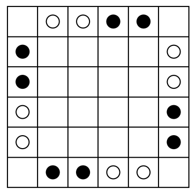
$n = 5$

$$\left[\frac{n^2}{2}\right] = 12$$



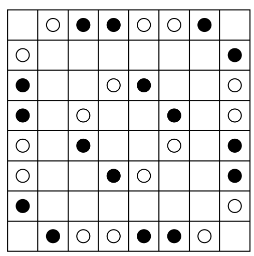
$n = 6$

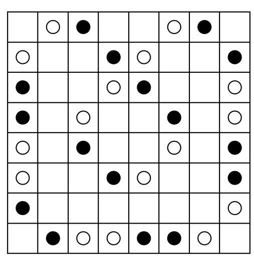
$$\left[\frac{n^2}{2}\right] + 2 = 20$$

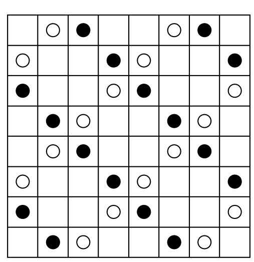


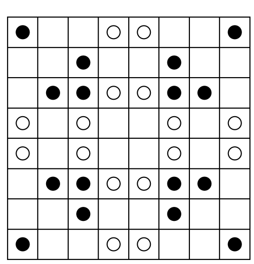
$n = 6$

$$\left[\frac{n^2}{2}\right] - 2 = 16$$









	○	●			●	○	
○			●	●			○
●			○	○			●
	●	○			○	●	
	●	○			○	●	
●			○	○			●
○			●	●			○
	○	●			●	○	

●	●		●	●		●	●
○			○			○	
○	○		○	○		○	○
●	●		●	●		●	●
●				●		●	
○	○		○	○		○	○
	●			○			