

Tegyük föl, hogy valamely  $A = 100a + 10b + c$  prímszám esetén van racionális gyök, azaz léteznek olyan  $p, q$  egészek,  $(p, q) = 1$ , hogy

$$a \left( \frac{p}{q} \right)^2 + b \frac{p}{q} + c = 0.$$

Látható, hogy szükségképpen  $\frac{p}{q} < 0$ , vagyis feltehetjük, hogy  $p > 0, q < 0$ . Az egyenletet  $q^2$ -tel szorozva:

$$(1) \quad ap^2 + bpq + cq^2 = 0.$$

Megvizsgálva a  $p$ -vel és  $q$ -val való oszthatóságot, azt kapjuk, hogy  $q \mid a$  és  $p \mid c$ , vagyis  $a = kq, c = lp$ . Mivel  $a, c > 0$ , azért  $k < 0$  és  $l > 0$ .

(1)-ből kifejezve  $ap$ -t és ezt  $pA$ -ba írva, majd átrendezve:

$$pA = 100(-bq - lq^2) + 10bp + lp^2 = 10b(p - 10q) + l(p^2 - 100q^2) = (p - 10q)(10b + lp + 10lq).$$

A jobb oldal osztható  $(p - 10q)$ -val, így a bal oldal is. Azonban  $p - 10q > p$ , tehát  $p - 10q \nmid p$ . Ez azt jelenti, hogy  $p - 10q$  és  $A$  nem relatív prímekek, ami viszont csak úgy lehet – lévén  $A$  prímszám –, ha  $p - 10q$  osztható  $A$ -val. Ám ez lehetetlen, mert

$$A = 100kq + 10b + lp > -10q + p,$$

hiszen  $100k \leq -100$ , és így  $100kq \geq -100q > -10q$ , valamint  $lp \geq p$ . Ellentmondásra jutottunk, tehát nem létezhet olyan háromjegyű prímszám, amelynek  $a, b, c$  jegyeire az  $ax^2 + bx + c = 0$  egyenletnek lenne racionális megoldása.

*Megjegyzés.* A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva is célhoz érhetünk: abból ugyanis látható, hogy  $b^2 - 4ac$  négyzetszám kell legyen. Ez pedig viszonylag egyszerűen végignézhető az összes háromjegyű prímszámra.