I. megoldás. A számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség miatt

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Egy négyszögben három oldal összege nagyobb, mint a negyedik oldal, ezért $a+b+c>d$. E két egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$a^2+b^2+c^2 > \frac{d^2}{3}.$$

Mindkét oldalhoz $2(ab+bc+ca)$-t adva és rendezve

$$(a+b+c)^2 - \frac{d^2}{3} > 2(ab+bc+ca)$$

adódik, ami éppen a bizonyítandó állítás, mert a jobb oldali kifejezés éppen a téglatest felszíne.

Zöldy Balázs (Budapest, Szent István Gimn., II. o.t.)

II. megoldás. Alakítsuk át a triviálisan teljesülő $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ egyenlőtlenséget: $2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca$,

$$3a^2+3b^2+3c^2 \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = (a+b+c)^2$$

A négyszögegyenlőtlenség alapján $a+b+c>d$, ezért

$$3a^2+3b^2+3c^2 > d^2, a^2+b^2+c^2-\frac{d^2}{3} > 0.$$

Ez utóbbi mindkét oldalához hozzáadva a téglatest felszínét, $(2ab+2bc+2ca)$-t, éppen a bizonyítandó állítás kapjuk:

$$(a+b+c)^2 - \frac{d^2}{3} > 2(ab+bc+ca).$$

Less Áron (Miskolc, Földes F. Gimn., I. o.t.)

Megjegyzés. A második megoldás során – bár nem mondtuk ki – bebizonyítottuk a számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenséget. Ezért a két megoldás lényegében ugyanaz.