Sajnos kimaradt a feladat szövegéből az a feltétel, hogy x és y pozitív számok. Enélkül elég könnyű az állítást cáfolni: az $x=-6$, $y=7$ választással például

$$(x+y)^3 \mid x^n+y^n$$

teljesül. Aki egy ilyen ellenpéldát beküldött, természetesen a maximális pontszámot kapta. Sokan viszont megoldották magát az „eredeti" feladatot is; és a továbbiakban mi is erre közlünk egy bizonyítást.

Vezessük be az $x+y=k$, $y=l$ jelölést. Mivel x és y relatív prímek, így k és l is azok. Vizsgáljuk meg, fennállhat-e a

$$k^3 \mid (k-l)^n+l^n$$

reláció.

Legyen először n páros. A binomiális tétel szerint $(k-l)^n+l^n=k^n-nk^{n-1}l+\dots-nkl^{n-1}+l^n+l^n$, ez akkor osztható k-val, ha $2\cdot l^n$ is osztható vele. Viszont $(k,\,l)=1$ miatt ez csak úgy lehet, ha $k\mid 2$. Azonban $k=x+y\geq 1+1=2$ (felhasználva a pozitivitást), vagyis szükségképpen $x=y=1$. Beírva ezt az oszthatóságba:

$$2^3 \mid 1^n+1^n=2,$$

ami nem teljesül. A páros esetben tehát igaz az állítás.

Legyen ezután n páratlan. Ismét a binomiális tételt használva,

$$\begin{aligned}(k-l)^n+l^n &= k^n-nk^{n-1}l+\dots-\frac{n(n-1)}{2}k^2l^{n-2}+nkl^{n-1}-l^n+l^n=\\ &=k^3\cdot M+nkl^{n-2}\left(-\frac{n-1}{2}k+l\right).\end{aligned}$$

Ez akkor osztható k^3-nel, ha $nl^{n-2}\left(-\frac{n-1}{2}k+l\right)$ osztható k^2-nel. Mivel $(k,\,l)=1$, azért k és $l^{n-2}\left(-\frac{n-1}{2}k+l\right)$ is relatív prímek, tehát szükségképpen $k^2\mid n$. Ez viszont $k\geq 2$ miatt ellentmond n négyzetmentességének. Ezzel az állítást minden esetben igazoltuk.

Rozmán András (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján