Induljunk ki az

$$x = a + \sqrt{x} \tag{1}$$

egyenletből. Ez csak $x \geq 0$ esetén értelmezett. Ebből $a + \sqrt{x} = x \geq 0$ miatt gyököt vonhatunk:

$$\sqrt{x} = \sqrt{a + \sqrt{x}},$$

majd ezt (1)-be visszahelyettesítve

$$x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}} \tag{2}$$

adódik. Tehát, ha x megoldása (1)-nek, akkor (2)-nek is.

Nézzük most a fordított irányt. Legyen x megoldása a (2) egyenletnek. Ekkor

$$x - a = \sqrt{a + \sqrt{x}} \geq 0, \tag{3}$$

ezt négyzetre emelve és kifejtve, majd szorzattá alakítva:

$$x^2 + a^2 - 2ax = a + \sqrt{x},$$
$$\left(x - a - \sqrt{x}\right)\left(x - a + \sqrt{x} + 1\right) = 0.$$

Ebből következik, hogy $x - a - \sqrt{x} = 0$ vagy $x - a + \sqrt{x} + 1 = 0$. Az utóbbi eset nem lehetséges, mert különben

$$x - a = -1 - \sqrt{x} < 0$$

teljesülne, ami ellentmond (3)-nak. Tehát szükségképpen

$$x - a - \sqrt{x} = 0,$$

és ez éppen azt jelenti, hogy x megoldása az (1) egyenletnek is.

Nyilas Gábor (Budapest, Szent István Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján