Az egyenletet átalakítva:

(1) $$y^3 = z^4 - x^2 = \left(z^2 - x\right)\left(z^2 + x\right).$$

A prímszámok – a szokásos értelmezés szerint – pozitívak (a negatív számokat is megengedő esetre majd még külön kitérünk), ezért az (1) jobb oldalán levő második tényező pozitív, és így az első is az. Emiatt $z^2 + x > z^2 - x > 0$, vagyis y^3 szorzattá alakítása csak a következő módon történhet:

$$z^2 + x = y^3 z^2 - x = 1 \qquad \text{vagy} \qquad z^2 + x = y^2 z^2 - x = y.$$

Több eset azért nem lehetséges, mert $y^3 > y^2 > y > 1$ és $z^2 + x > z^2 - x > 0$.

Vizsgáljuk az első lehetőséget. Ekkor

$$x = z^2 - 1 = (z-1)(z+1).$$

Mivel x prím és $z + 1 > z - 1 > 0$, azért ez csak úgy teljesülhet, ha $z + 1 = x$ és $z - 1 = 1$. Ebből $z = 2$, $x = 3$ következik; ezt visszaírva

$$y^3 = 2^4 - 3^2 = 7$$

adódik, ami azt jelenti, hogy ebben az esetben nincs megoldás.

Tekintsük most a másikat. Az első egyenletből $x = y^2 - z^2 = (y-z)(y+z)$. Ebből az előzőhöz hasonló meggondolással kapjuk, hogy $y + z = x$ és $y - z = 1$. Látható, hogy y és z ellentétes paritású, ezért $y = 2$ vagy $z = 2$. Az $y = 2$ eset nem lehetséges, mert akkor $z = 1$ adódna. Tehát $z = 2$ és így $y = 3$. Ezt visszaírva az eredeti egyenletbe:

$$x^2 = 2^4 - 3^3 = 16 - 27 = -11,$$

vagyis ezúttal sem kaptunk megoldást.

Azt már láttuk, hogy ha csak pozitív számokat tekintünk prímeknek, akkor az egyenletnek nincs megoldása. A teljesség kedvéért engedjük meg a negatív esetet is (a pontozásnál ennek az elhagyása persze nem jelentett levonást). A megoldhatóság során továbbra is feltehető, hogy x, $z > 0$, hiszen ha így nincs megoldás, akkor negatív x vagy z mellett sincs.

Legyen tehát $y < 0$, x, $z > 0$; ekkor

$$y^3 = \left(z^2 - x\right)\left(z^2 + x\right).$$

Itt az látható, hogy $\left|z^2 + x\right| > \left|z^2 - x\right|$, s így y^3 következő szorzattá alakításai lehetségesek:

$$z^2 + x = -y^3 z^2 - x = -1 \qquad \text{vagy} \qquad z^2 + x = y^2 z^2 - x = y.$$

Az előbbit tekintve, $x = z^2 + 1$ miatt x és z közül az egyik páros. Ha $x = 2$, akkor $z = 1$, ami nem prím; míg $z = 2$ esetén $x = 5$, ezt visszahelyettesítve $y^3 = 2^4 - 5^2 = -9$, ez sem vezetett megoldáshoz.

Vizsgáljuk a másik szorzattá alakítási lehetőséget: $x^2 + x = y^2$ alapján $x = y^2 - z^2 = (y-z)(y+z)$. Itt $y < 0$, $z > 0$, $x > 0$ és prím, ezért ez csak úgy állhat fönn, ha $y - z = -x$, $y + z = -1$. Ekkor y és z közül valamelyik páros: $z = 2$ esetén $y = -3$, visszaírva $x^2 = 2^4 + 3^3 = 43$, ami nem négyzetszám; $y = -2$ esetén $z = 1$, nem prím.

Ezzel teljes mértékben igazoltuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása.

Nyakas Péter (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján