

Megjegyzés. A feladat sajnos nem abban a formában jelent meg, amelyben a kitűzője szerette volna. Eredetileg a második mondat így szólt volna: *Van-e olyan pont, amelyen pontosan két területfelező egyenes megy át?* A kitűzött formában a feladat inkább az **N.**, mint a **Gy.** jelű példák közé illik. A feladat teljes megoldása megtalálható *D. O. Skljarszkij–N. N. Csencov–I. M. Jaglom: Válogatott feladatadatok és tételek az elemi matematika köréből* című könyve 2/1 kötetének 72–74. oldalán. Az általunk itt közölt megoldásvázlat is ezen alapul.

Megoldás. Ismert, hogy egy szögtartományból egyenlő területű háromszögeket lemetező egyenesek egy olyan hiperbola érintői, amelynek a szögcsúcsok egyenesei az aszimptotái. Ezért azok az egyenesek, amelyek az ABC háromszög területét felezik és a háromszög oldalai közül AB -t és BC -t metszik, egy olyan \mathcal{H}_B hiperbolának az érintői, amelynek aszimptotái a BA és a BC egyenesek. \mathcal{H}_B -nek három érintőjét könnyen megadhatjuk. Ezek a háromszög A -hoz és C -hez tartozó súlyvonalai, valamint az AC -vel párhuzamos, a B -hez tartozó magasságot $\frac{1}{\sqrt{2}} : \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ arányban osztó egyenes. Ezek nyilvánvalóan felezik a háromszög területét. Ez a három érintő és a két aszimptota egyértelműen meghatározza \mathcal{H}_B -t. Ugyanígy kapjuk az ábrán látható \mathcal{H}_A és \mathcal{H}_C hiperbolákat is.

\mathcal{H}_B érintői közül azok felezik a háromszög területét, amelyek a háromszögnek a BA és a BC oldalát is metszik. Ezek azok az érintők, amelyek \mathcal{H}_B -nek a PR ívét érintik. (Egyszerű számolással belátható, hogy P , Q és R éppen a megfelelő súlyvonalak felezőpontjai.) Ugyanígy \mathcal{H}_A és \mathcal{H}_C érintői közül azok felezik a területet, amelyek a QR , illetve a PR ívet érintik. Egy ponton át tehát annyi területfelező egyenes megy, ahány hiperbolaívhez lehet az adott pontból érintőt húzni.

A PQ , QR és RP hiperbolaívек belső pontjaiból a három ív közül pontosan kettőhöz húzhatunk érintőt, míg más pontokból vagy egyhez, vagy mindháromhoz (a PQR háromszögszerű alakzat belső pontjaiból). Tehát a három hiperbolaív alkotja a keresett halmazt.

