

Az  $a_{2n} - a_n = n$  feltételből következik, hogy  $a_{2n}$  és  $a_n$  közé  $n - 1$  egész szám esik. Ugyanakkor a sorozatnak is éppen ennyi eleme található köztük, s mivel a sorozat egészekből áll és szigorúan növekvő, ez csak úgy lehet, ha a sorozat  $a_n$  és  $a_{2n}$  között egyesével növekszik. Ez azonban minden  $n$ -re igaz, így szükségképpen

$$a_n = a_1 + n - 1.$$

Az  $a_0 = a_1 - 1$  jelölést bevezetve,  $a_n = a_0 + n$ .

Megmutatjuk, hogy  $a_0$  minden számmal osztható, vagyis  $a_0 = 0$ . Tételezzük fel ugyanis, hogy valamely  $q$  prímszámra  $q \nmid a_0$ , s így  $a_0 \neq 0$ . Legyen először  $a_0 > 0$ . Válasszunk egy  $p > (a_0 + 1)q$  prímet. Ekkor a  $p = a_{p-a_0}$  egyenlőség miatt  $p - a_0$  is prím, majd ezt folytatva  $p - 2a_0, \dots, p - (q-1)a_0 > a_0q + q - qa_0 + a_0 > q$  is az. Ez  $q$  darab prímszám, amelyek  $q$ -val nem lehetnek oszthatók, lévén nagyobbak nála; létezik köztük kettő, amelyek különbsége osztható  $q$ -val:

$$q \mid (p - ia_0) - (p - ja_0) = (j - i)a_0.$$

Mivel  $(q, a_0) = 1$ , azért  $q \mid (j - i)$ , holott  $0 < j - i < q - 1$ , ami ellentmondás.

Ha pedig  $a_0 < 0$ , akkor ugyanez a gondolatmenet a  $p, p + a_0, \dots, p + (q-1)a_0$  sorozatra alkalmazható. Más eset nincs, így tehát azt kaptuk, hogy egyedül  $a_n = n$  lehetséges, ami viszont nyilván jó is.

*Méder Áron* (Budapest, Táncsics M. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján