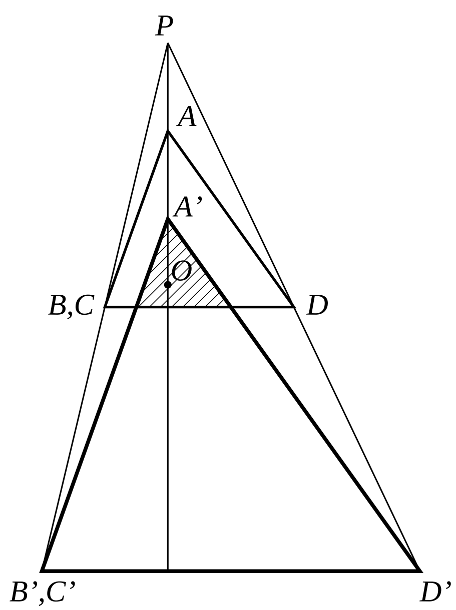
A szabályos tetraédernek kétféle szimmetriatengelye van. Az egyik típusú a tetraéder két szemközti élének felezőpontját köti össze – erre az egyenesre, mint tengelyre tükrözve a tetraédert, képe önmaga lesz –, a másik típusú pedig a tetraéder egy csúcsát köti össze a szemközti lap középpontjával – e körül az egyenes körül 120°-kal elforgatva lesz a tetraéder képe önmaga. A feladat kitűzője (és a legtöbb megoldó is) a második típusú szimmetriatengelyre gondolt, ez azonban a példa szövegéből nem derül ki. 5 pontos megoldásnak fogadtuk el mindazokat a dolgozatokat, amelyek valamelyik tengelyre megoldották a feladatot. Terjedelmi korlátok miatt csak a második típusú tengelyre vonatkozó megoldást közöljük. (Az első típus esetén a számolás hosszadalmasabb, a végeredmény $\sqrt[3]{3}$.)

Feltehetjük, hogy P az O középpontú $ABCD$ tetraéder A-n átmenő OA szimmetriatengelyén van. P nem lehet a tetraéder belső pontja, mert akkor a nagyított tetraéder teljes egészében tartalmazná T-t. A középpontos hasonlóság tulajdonságai miatt a nagyított tetraéder lapjai párhuzamosak T megfelelő lapjaival, továbbá a két tetraéder egyik szimmetriatengelye közös. Ezért a két tetraéder közös része is egy szabályos tetraéder lesz. Hasonló testek térfogatának aránya megegyezik a hasonlóság arányának köbével, ezért $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ miatt a közös rész lineáris adatai megegyeznek T megfelelő adatainak felével. Ezek után két esetet kell megkülönböztetnünk attól függően, hogy P és A a BCD síknak ugyanazon az oldalán van-e, vagy nem.

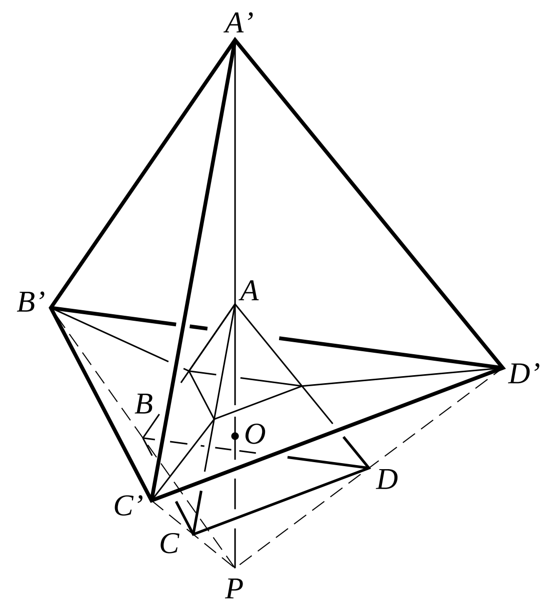
Ha igen (*1. ábra*), akkor A-nak a nagyítás során kapott A' képe a közös rész BCD-re nem illeszkedő csúcsa lesz. Az előzőek miatt A' fele olyan messze lesz a BCD laptól, mint A. Ismert, hogy O a tetraéder magasságának BCD-hez közelebbi negyedelőpontja, ezért $OA' = \frac{1}{2}AA'$. A nagyítás miatt $PA = AA'$, tehát

$$PO = PA + AA' + A'O = \frac{5}{2}AA' = \frac{5}{4}m,$$

ahol m jelöli T magasságát. A T térfogata egységnyi, ezért $m = \frac{2}{3}\sqrt[6]{243}$, azaz $PO = \frac{5}{6}\sqrt[6]{243}$.



1. ábra



2. ábra

Ha a BCD sík elválasztja P-t és A-t (*2. ábra*), akkor A lesz a közös rész egyik csúcsa, annak A-val szemközti lapját pedig a BCD sík S' képe metszi ki T-ből. Ezért az S' sík felezi T-nek az A-hoz tartozó magasságát, másrészt a nagyítás miatt S' kétszer olyan messze van P-től, mint a BCD sík. Tehát a BCD és az S' síkok harmadolják a PA szakaszt. Ezért $PA = \frac{3}{2}m$. Viszont $OA = \frac{3}{4}m$, tehát

$$PO = PA - OA = \frac{3}{4}m = \frac{\sqrt[6]{243}}{2}.$$

Így a tetraéder középpontja P-től vagy $\frac{5}{6}\sqrt[6]{243} \approx 2,0817$, vagy $\frac{1}{2}\sqrt[6]{243} \approx 1,0409$ egységnyi távolságra van.

Hegyi Barnabás (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján