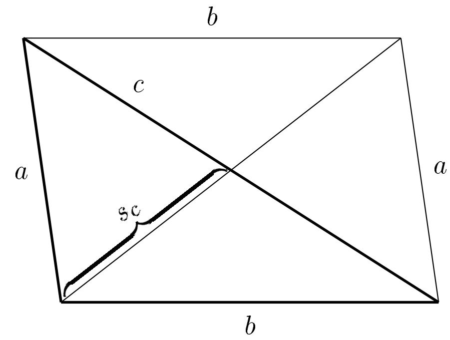
I. megoldás. Tükrözzük a háromszöget a c oldal felezőpontjára. Így egy olyan paralelogrammát kapunk, amelynek szemközti oldalai a és b, egyik átlója c, a másik átlója pedig $2s_c$ hosszúságú, ahol s_c az eredeti háromszög c-hez tartozó súlyvonalának a hossza (*1. ábra*). Tudjuk, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével, ezért

$$2(a^2+b^2)=c^2+4s_c^2.$$



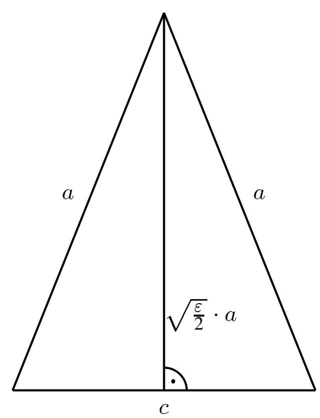
1. ábra

Vagyis $2(a^2+b^2)-c^2=4s_c^2>0$, amiből rögtön adódik a bizonyítandó állítás. Mivel s_c^2 tetszőlegesen kicsi lehet, azért a fenti összefüggésből az is következik, hogy nem írhatunk 2-nél kisebb szorzót.

Krizsán Árpán (Dombóvár, Illyés Gy. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy $(a+b)^2>c^2$. Ugyanakkor nyilvánvalóan $(a-b)^2\ge 0$. E két egyenlőtlenséget összeadva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)>c^2.$$



2. ábra

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $0<\varepsilon<2$ számhoz van olyan háromszög, amelynek oldalaira

$$(2-\varepsilon)(a^2+b^2)=c^2,$$

azaz az eredeti egyenlőtlenségben a bal oldalon nem írhatunk 2-nél kisebb szorzót. Tekintsük azt az egyenlő szárú háromszöget, amelyben $a=b$, az alaphoz tartozó magasság pedig $m=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2}}a$ (*2. ábra*). Ekkor Pitagorasz tétele szerint $\left(\dfrac{c}{2}\right)^2=a^2-m^2=a^2\left(1-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, vagyis $c^2=(2-\varepsilon)\cdot 2a^2=(2-\varepsilon)(a^2+b^2)$.