I. megoldás. Jelöljük a feladatban említett síkot S-sel. A torz négyszög oldalainak S-sel közös pontjai legyenek E, F, G, H az *ábra* szerint. Vetítsük merőlegesen a torz négyszög csúcsait az S síkra, a vetületi pontok legyenek A', B', C', D'. A feladat feltételei szerint egyik pont sem esik egybe a vetületével, ezért pl. $AA' \parallel BB'$, tehát a párhuzamos szelők tétele szerint $\frac{AE}{EB} = \frac{AA'}{BB'}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\frac{BF}{FC} = \frac{BB'}{CC'}$, $\frac{CG}{GD} = \frac{CC'}{DD'}$, $\frac{DH}{HA} = \frac{DD'}{AA'}$. A négy aránypár szorzata:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} = \frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{DD'} \cdot \frac{DD'}{AA'} = 1.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk a másik körüljárási iránnyal.

Formanek Csaba (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o.t.)

II. megoldás. Vegyünk fel egy térbeli koordinátarendszert úgy, hogy abban az S sík egyenlete $z = 0$ legyen. A torz négyszög csúcsainak koordinátáit jelöljük így: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$. Az osztási arány pl. az AB oldalon legyen a_1, azaz $\frac{AE}{EB} = \frac{a_1}{1}$, a többi arány ugyanígy a_2, a_3, a_4. Mivel pl. az E pont illeszkedik a $z = 0$ egyenletű síkra, z koordinátája 0, és így az osztópont koordinátáira vonatkozó képlet szerint $0 = \frac{z_1 + a_1 z_2}{1 + a_1}$, amiből $a_1 = -\frac{z_1}{z_2}$. Ugyanígy kapjuk, hogy $a_2 = -\frac{z_2}{z_3}$, $a_3 = -\frac{z_3}{z_4}$, $a_4 = -\frac{z_4}{z_1}$. Nyilván egyik z_i se zérus, hiszen a torz négyszög csúcsai nem illeszkednek az S síkra. A négy arányszám szorzata:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = -\frac{z_1}{z_2} \cdot \left(-\frac{z_2}{z_3}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_4}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_1}\right) = 1.$$

Szita István (Körmend, Kölcsei F. Gimn., III. o.t.)

III. megoldás. Tekintsük az első megoldáshoz készített ábrát. Az E, H, B és D pontok egy síkban vannak, ezért az EH és BD egyenesek metszik egymást, vagy párhuzamosak. Az első esetet tekintve, legyen a metszéspont K. Az F, G és K pontok egyfelől benne vannak az S síkban, másfelől illeszkednek a B, C, D pontok által meghatározott síkra. Ez a két sík feltételeink szerint különböző, tehát az F, G és K egy egyenesen van, éspedig e két sík metszésvonalán. Alkalmazzuk ezután az ABD háromszögre és az EH egyenesre, valamint a BCD háromszögre és az FG egyenesre a Menelaosz-tételt:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BK}{KD} \cdot \frac{DH}{HA} = -1, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DK}{KB} = -1.$$

A két egyenlet szorzatából:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1, \qquad \text{hiszen} \qquad \frac{BK}{KD} \cdot \frac{DK}{KB} \qquad \text{nyilván 1.}$$

A négy arányszám szorzata tehát 1.

Hátravan még az az eset, amikor $EH \parallel BD$. Ekkor $S \parallel BD$, aminek következtében $BD \parallel GF$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az ABD, illetve BCD háromszögekre:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{HA}{DH}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{BF}{FC} = \frac{GD}{CG},$$

ahol a szereplő szakaszok nem szükségképpen irányított szakaszok. A két egyenlőségből:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1.$$

Szabó Jácint (Győr, Révai M. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy az első két megoldás lényegében ugyanaz, csak az alkalmazott eszköz más.