Elegendő azt igazolni, hogy

$$4 \cdot \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \left(\frac{s}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R} + 2\right)^2 . \tag{1}$$

Jelöljük (1) jobb oldalát J-vel. Ismert azonosságok felhasználásával megmutatjuk, hogy J azonosan egyenlő (1) bal oldalával. Ezek az azonosságok:

$$1 + \frac{r}{R} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma, (2) - 1 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma = 4 \cdot \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma . (3)$$

Mindkét azonosság – megoldási útmutatóval – megtalálható a Geometriai feladatok gyűjteménye II. példatárban, éspedig (2) ekvivalens a 434.b) és 434.k), (3) pedig a 434.d) feladattal. Ezután számítsuk ki J-t:

$$J = \left(\frac{s}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R} + 2\right)^2 = \left(\frac{a+b+c}{2R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R} + 2\right)^2 =$$
$$= (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 - (1 + \cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma)^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma +$$
$$+ 2\sin\alpha\sin\beta + 2\sin\alpha\sin\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma - 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma -$$
$$-2\cos\alpha - 2\cos\beta - 2\cos\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\cos\alpha\cos\gamma - 2\cos\beta\cos\gamma,$$

ahol fölhasználtuk a (2) azonosságot és azt, hogy pl. $\frac{a}{2R} = \sin\gamma$. Ismeretes, hogy pl. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos 2\alpha$, továbbá

$$2 \cdot \sin\alpha\sin\beta - 2 \cdot \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma = 2\left[-\cos(\alpha+\beta) - \cos\gamma\right] = 0.$$

Ezért $J = -\cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma - 1$, és így (3) szerint $J = 4 \cdot \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Ez azt jelenti, hogy (1) azonosság, tehát igaz a feladat állítása.

Brezovich László (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., III. o.t.) és *Szobonya László* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján