I. megoldás. A feladat megoldásához szükségünk lesz egy egyszerű ismeretre. A szokásos jelölésekkel a háromszög területe kétféleképpen fölírva: $\frac{abc}{4R} = \frac{c \cdot m_c}{2}$. Ebből

$$a \cdot b = 2Rm_c. \tag{1}$$

Az *ábra* jelöléseit használva alkalmazzuk (1)-et az ABD és BCD háromszögekre:

$$AB \cdot DA = 2AM, \quad \text{illetve} \quad BC \cdot CD = 2CN. \tag{2}$$

A feladat feltétele és (2) szerint $AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA = 2AM \cdot 2CN \geq 4$, amiből

$$AM \cdot CN \geq 1, \qquad CN \geq \frac{1}{AM}. \tag{3}$$

Mivel a kör átmérője 2, $AM + CN \leq 2$, amiből (3) alapján $AM + \frac{1}{AM} \leq 2$. Ismeretes, hogy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, ezért előbbi eredményünkkel $2 \leq AM + \frac{1}{AM} \leq 2$. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha $AM = \frac{1}{AM} = 1$. Ebből az is látható, hogy $CN = 1$, és M, N egybeesik a kör középpontjával. De akkor AC és BD a kör két egymásra merőleges átmérője, amiből következik, hogy $ABCD$ négyzet.

Horváth Gábor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., I. o.t.)

II. megoldás. A négyszög oldalai nemnegatív számok, ezért a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint: $\sqrt{(AB \cdot CD)(BC \cdot DA)} \leq \frac{AB \cdot CD + BC \cdot DA}{2}$. A Ptolemaiosz-tétel alapján: $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$. Két megállapításunk és a feladat feltétele szerint: $4 \leq \left(\sqrt{(ab \cdot cd)(BC \cdot DA)}\right)^2 \leq \left(\frac{AB \cdot CD + BC \cdot DA}{2}\right)^2 = \left(\frac{AC \cdot BD}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{2 \cdot 2}{2}\right)^2 = 4$, ahol felhasználtuk azt is, hogy $AC \leq 2$ és $BC \leq 2$. A fölírt relációk csak úgy teljesülhetnek, ha mindenütt egyenlőség érvényes, vagyis

$$AC = BD = 2(1)sAB \cdot CD = BC \cdot DA.(2)$$

(1)-ből következik, hogy AC és BD átmérők, tehát $ABCD$ legalább téglalap. A téglalapban $AB = CD$ és $BC = DA$, de akkor (2)-ből $AB^2 = BC^2$, azaz $AB = BC$. Ezért ebben a téglalapban a szomszédos oldalak is egyenlők, tehát négyzet. Könnyű látni, hogy $AB = \sqrt{2}$ oldallal a megoldás létezik és ekkor a feltételben egyenlőség áll fenn.

Szobonya László (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzés. Szobonya László megmutatta, hogy ha az egységsugarú körbe írt konvex n-szög oldalainak szorzata nagyobb vagy egyenlő, mint $\left(2 \cdot \sin\frac{\pi}{n}\right)^n$ $(n \geq 3)$, akkor az n-szög szabályos, és a feltételben egyenlőség lesz. Feladatunk ennek az általánosabb problémának $n = 4$-re adódó speciális esete.