A feltételek alapján a polinom felírható $f(x)=(x-1)^8\left(ax^2+bx+c\right)$ alakban, ahol a, b és c valós számok, valamint $a\neq 0$. A műveleteket elvégezve

$$f(x)=ax^{10}+(b-8a)x^9+(c-8b+28a)x^8+(-8c+28b-56a)x^7++(28c-56b+70a)x^6+(-56c+70b-56a)x^5+(70c-56b$$

Az együtthatók között szerepel az a, a c és a $b-8a$, ezért ezeknek egészeknek kell lenniük; tehát a, c és $b=(b-8a)+8a$ is egészek.

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben mindegyik együttható abszolút értéke kisebb, mint 28. Írjuk fel ezt a negyed-, ötöd-, és hatodfokú tag együtthatójára, és osszunk 14-gyel:

$$|5c-4b+2a|<2,\qquad |-4c+5b-4a|<2,\qquad |2c-4b+5a|<2.$$

Mivel egész számokról van szó, ez azt jelenti, hogy mindhárom érték legfeljebb 1. Ebből következik, hogy

$$3|3c-3b+2a|=|(5c-4b+2a)-(-4c+5b-4a)|\le\le|(5c-4b+2a)|+|(-4c+5b-4a)|\le 2s3|2c-3b+3a|=|(2c-4b+5a)$$

Ismét az egész-értékűség miatt ez akkor teljesülhet csak, ha $3c-3b+2a=0$ és $2c-3b+3a=0$. Ennek a két számnak a különbsége, $c-a$ is 0, tehát $a=c$, valamint $b=(3c+2a)/3=\dfrac{5}{3}a$.

Tekintsük most a hetedfokú tagot. Az indirekt feltevés szerint $|8c-28b+56a|<28$. Behelyettesítve legutóbbi eredményeinket, $\left|8a-28\cdot\dfrac{5}{3}a+56a\right|=\dfrac{52}{3}|a|<28$, vagyis $|a|<\dfrac{21}{13}<2$. Ez azt jelenti, hogy a értéke csak $+1$ vagy -1 lehet. Ekkor viszont $b=\dfrac{5}{3}a$ nem egész. Az indirekt feltevés tehát ellentmondásra vezetett.

Pintér Dömötör (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., III. o.t.)

Megjegyzések. 1. Létezik olyan 10-edfokú, egész együtthatós polinom, amelynek az 1 nyolcszoros gyöke, és minden együttható abszolút értéke legfeljebb 28, például

$$f(x)=(x-1)^8\left(x^2+2x+1\right).$$

2. Többen a polinomot $a(x-1)^8(x-b)(x-c)$ alakban keresték. A polinomnak azonban nem feltétlenül létezik még két valós gyöke, sőt, ha léteznek is, nem biztos, hogy egészek.