Írjunk mindegyik tört számlálójába $abc$-t:

$$\frac{abc}{a^2(b+c)}+\frac{abc}{b^2(c+a)}+\frac{abc}{c^2(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

(Ennek a lépésnek az az előnye, hogy minden egyes törtben a számláló és a nevező is csupa harmadfokú tagból áll, s nincs szükség többé az $abc=1$ feltételre.)

Egyszerűsítsünk és bontsuk fel a zárójeleket:

$$\frac{bc}{ab+ac}+\frac{ac}{bc+ab}+\frac{ab}{ac+bc}\geq\frac{3}{2}.$$

Ezzel a bizonyítandó állítást visszavezettük arra az ismert feladatra, hogy tetszőleges pozitív $x$, $y$, $z$ valós számokra

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

(A mi esetünkben $x=bc$, $y=ac$, $z=ab$.)

Növeljük mindhárom törtet 1-gyel, hogy a számlálójuk megegyezzen, és alkalmazzuk rájuk a számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}+\frac{x+y+z}{x+y}}{3}\geq\frac{3}{\frac{y+z}{x+y+z}+\frac{x+z}{z+y+x}+\frac{x+y}{x+y+z}}=\frac{3}{2},$$

vagyis

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}+\frac{x+y+z}{x+y}-3\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

*Kutalik Zoltán* (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján