

Azt kell megmutatnunk, hogy $4a + 4b + 4c + 4ab + 4ac + 4bc + 4abc < 12$, ahol a, b, c a téglatest élei. Felhasználjuk, hogy $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Így azt kell bizonyítanunk, hogy

$$4a + 4b + 4c + 4ab + 4ac + 4bc + 4abc < 12a^2 + 12b^2 + 12c^2.$$

A következő átalakítások helyessége könnyen belátható:

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - ab - ac - bc - a - b - c - abc > 0,$$

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 + 1 + ab + ac + bc - a - b - c - abc > 0,$$

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 + (1 - a)(1 - b)(1 - c) > 0.$$

Itt az első három tag nemnegatív, a negyedik pedig pozitív, hiszen a, b, c mindegyike kisebb mint 1; ezért az utolsó egyenlőtlenség biztosan igaz. Mivel minden lépésünk megfordítható, az utolsó sorból következik a feladat állítása.

Hatvári Zsuzsanna (Veszprém, Lovassy László Gimn., III. o.t.)